Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi **B** *(2005. okt. 25) — megoldásvázlatok*

1. Ha $x^{2005} + bx^{11} + 1 = (x^2 + 1)q(x) + (2x - 1)$, akkor $x = i$ helyettesítéssel $i - bi + 1 = 2i - 1$, ahonnan $b = -2i - 1$ (3 pont). Ha viszont $x = -i$, akkor hasonlóan $b = 2i - 1$ adódik (2 pont). A keresett b tehát nem létezik (1 pont).

2. A feltétel azt jelenti, hogy a $z - (-1)$ vektort i-vel szorozva, azaz pozitív irányba 90 fokkal elforgatva a $z - i$ vektorral párhuzamos, és egyenlő állású vektort kapunk (3 pont). Ezért a $z(-1)i$ háromszögben z-nél derékszög van, és a keresett alakzat az $(-1)i$ szakaszra rajzolt Thálész-körnek a -1 és i közötti „felső” íve (3 pont). (A félkörhöz egyik végpontja sem tartozik hozzá.) *Második megoldás:* Legyen $z = x + iy$. A megadott tört valós része pozitív, azaz $-x + y - 1 > 0$ (1 pont), képzetes része pedig nulla, azaz $x^2 + x + y^2 - y = 0$ (3 pont). Így $(x + (1/2))^2 + (y - (1/2))^2 = (1/2)$, ami az első megoldásban leírt kört adja (1 pont). Az $y > x + 1$ egyenlőtlenség fejezi ki, hogy ennek a körnek az $y = x + 1$ egyenes felső félsíkjába eső félköríve lesz csak megoldás (1 pont).

3. Az $x_i^4 + 2x_i + d = 0$ egyenleteket adjuk össze az $i = 1, 2, 3, 4$ értékekre. Azt kapjuk, hogy $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 4d$ (3 pont, ugyanez a Newton-Girard-féle formulából is következik). A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (1 pont). A negyedik hatványok összege tehát akkor és csak akkor nulla, ha $d = 0$ (1 pont). Ekkor azonban az egyenletnek gyöke a nulla, tehát a válasz igenlő (1 pont).

4. Ha $\varepsilon\eta^2$ rendje 15, akkor a 30-adik hatványa is 1 (2 pont). De $\eta^{30} = 1$, és így $\varepsilon^{30} = 1$ (2 pont). Ez ellentmondás, mert ε rendje 18, ami nem osztója 30-nak (2 pont). *Második megoldás:* Az ε szöge 2π-nek $p/18$-szorosa, ahol p a 18-hoz relatív prím egész szám (1 pont). Hasonlóan η szöge $2\pi q/10$, ahol $(q, 10) = 1$ és q egész (1 pont). Ekkor $\varepsilon\eta^2$ szöge 2π-nek $(p/18)+(2q/10) = (5p+18q)/90$-szerese (2 pont). Ha $\varepsilon\eta^2$ rendje 15 lenne, akkor ezt a törtet lehetne úgy egyszerűsíteni, hogy a nevező 15 legyen. Ez a tört azonban már 3-mal sem egyszerűsíthető, mert $(p, 18) = 1$ miatt a számlálója nem osztható hárommal. Ilyen számok tehát nem léteznek (2 pont).

5. A polinom deriváltja $10x^9 - 10i$ (1 pont). Ennek gyökei az i szám kilencedik gyökei, azaz (trigonometrikus alakban számolva) $z_k = \cos(10° + k40°) + i\sin(10° + k40°)$, ahol $0 \le k < 9$ (2 pont). Ezek akkor lesznek többszörös gyökei az eredeti polinomnak, ha gyökei is, tehát a c lehetséges értékei $c_k = -z_k^{10} + 10iz_k$ (1 pont). Tudjuk, hogy $z_k^9 = i$, ezért $c_k = z_k(10i - z_k^9) = z_k(10i - i) = 9iz_k$ (1 pont). E szám szöge $100° + k40°$, ami $k = 2$ esetén $180°$, vagyis $c_2 = -9$ valós megoldás (1 pont). Megjegyezzük, hogy k többi értékére c_k nem valós. Természetesen a kapott kétszeres gyök a $z_2 = i$ szám. *Második megoldás:* Ha z többszörös gyök, akkor a deriváltnak is gyöke, azaz $z^9 = i$ (1 pont). Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $0 = z^{10} - 10iz + c = z(z^9 - 10i) + c = -9iz + c$ (2 pont). Átrendezve és kilencedik hatványra emelve $c^9 = 9^9 iz^9 = -9^9$ (1 pont). Mivel c valós, c csak -9 lehet (1 pont). Innen $z = (-9)/(9i) = i$, ami az eredeti polinomnak és a deriváltjának is gyöke, és ezért a $c = -9$ tényleg megoldás (1 pont).

6. Legyen $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, ekkor $T(v) = vz + i$ (1 pont). Ezért ha T-t n-szer alkalmazzuk, akkor (a Horner-elrendezés alapján) $vz^n + iz^{n-1} + \ldots + iz + i$ adódik (2 pont). A mértani sor összegképletét is felhasználva ez akkor egyenlő v-vel, ha $i(z^n - 1)/(z - 1) = v(1 - z^n)$. Innen $z^n = 1$ vagy $v = i/(1 - z)$, feltéve, hogy $z \neq 1$ (2 pont). Ezért az alábbi lehetőségek vannak. Ha $z = 1$ (vagyis $\alpha = k360°$), akkor egyik pont sem lesz zöld. Ha $z \neq 1$, de z egységgyök (vagyis α fokokban mérve racionális szög), akkor minden pont zöld lesz. A fennmaradó esetben $v = i/(1 - z)$ az egyetlen zöld pont, ez már egy lépésben visszatér önmagába, vagyis T-nek fixpontja (1 pont).