Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi **A** *(2005. okt. 25) — megoldásvázlatok*

1. Ha $x^{2005} + bx^7 - 1 = (x^2+1)q(x) + (2x+1)$, akkor $x = i$ helyettesítéssel $i - bi - 1 = 2i + 1$, ahonnan $b = 2i - 1$ (3 pont). Ha viszont $x = -i$, akkor hasonlóan $b = -2i - 1$ adódik (2 pont). A keresett b tehát nem létezik (1 pont).

2. A feltétel azt jelenti, hogy a $z - i$ vektort i-vel szorozva, azaz pozitív irányba 90 fokkal elforgatva a $z - 1$ vektorral párhuzamos, és egyenlő állású vektort kapunk (3 pont). Ezért a $zi1$ háromszögben z-nél derékszög van, és a keresett alakzat az $i1$ szakaszra rajzolt Thálész-körnek az 1 és i közötti „felső" íve (3 pont). (A félkörhöz egyik végpontja sem tartozik hozzá.) *Második megoldás:* Legyen $z = x + iy$. A megadott tört képzetes része nulla, azaz $x^2 - x + y^2 - y = 0$ (3 pont), valós része pedig pozitív, azaz $x - 1 + y > 0$ (1 pont). A kapott egyenlet $(x-(1/2))^2 + (y-(1/2))^2 = (1/2)$ alakban írható, ami az első megoldásban leírt kört adja (1 pont). Az $y > 1 - x$ egyenlőtlenség fejezi ki, hogy ennek a körnek az $y = -x + 1$ egyenes felső félsíkjába eső félköríve lesz csak megoldás (1 pont).

3. Az $x_i^4 - 2x_i + d = 0$ egyenleteket adjuk össze az $i = 1, 2, 3, 4$ értékekre. Azt kapjuk, hogy $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - 4d$ (3 pont, ugyanez a Newton-Girard-féle formulából is következik). A gyökök és együtthatók összefüggése miatt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (1 pont). A negyedik hatványok összege tehát akkor és csak akkor nulla, ha $d = 0$ (1 pont). Ekkor azonban az egyenletnek gyöke a nulla, tehát a válasz igenlő (1 pont).

4. Ha $\varepsilon\eta^2$ rendje 14, akkor a 42-edik hatványa is 1 (2 pont). De $\eta^{42} = 1$, és így $\varepsilon^{42} = 1$ (2 pont). Ez ellentmondás, mert ε rendje 12, ami nem osztója 42-nek (2 pont). *Második megoldás:* Az ε szöge 2π-nek $p/12$-szerese, ahol p a 12-höz relatív prím egész szám (1 pont). Hasonlóan η szöge $2\pi q/21$, ahol $(q, 21) = 1$ és q egész (1 pont). Ekkor $\varepsilon\eta^2$ szöge 2π-nek $(p/12) + (2q/21) = (7p + 8q)/84$-szerese (2 pont). Ha $\varepsilon\eta^2$ rendje 14 lenne, akkor ezt a törtet lehetne úgy egyszerűsíteni, hogy a nevező 14 legyen. Ez a tört azonban már 2-vel sem egyszerűsíthető, mert $(p, 12) = 1$ miatt a számlálója páratlan. Ilyen számok tehát nem léteznek (2 pont).

5. A polinom deriváltja $6x^5 - 6i$ (1 pont). Ennek gyökei az i szám ötödik gyökei, azaz (trigonometrikus alakban számolva) $z_k = \cos(18° + k72°) + i\sin(18° + k72°)$, ahol k értékei $0, 1, 2, 3, 4$ (2 pont). Ezek akkor lesznek többszörös gyökei az eredeti polinomnak, ha gyökei is, tehát a c lehetséges értékei $c_k = -z_k^6 + 6iz_k$ (1 pont). Tudjuk, hogy $z_k^5 = i$, ezért $c_k = z_k(6i - z_k^5) = z_k(6i - i) = 5iz_k$ (1 pont). E szám szöge $108° + k72°$, ami $k = 1$ esetén $180°$, vagyis $c_1 = -5$ valós megoldás (1 pont). Megjegyezzük, hogy k többi értékére c_k nem valós. Természetesen a kapott kétszeres gyök a $z_1 = i$ szám. *Második megoldás:* Ha z többszörös gyök, akkor a deriváltnak is gyöke, azaz $z^5 = i$ (1 pont). Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $0 = z^6 - 6iz + c = z(z^5 - 6i) + c = -5iz + c$ (2 pont). Átrendezve és ötödik hatványra emelve $c^5 = 5^5 iz^5 = -5^5$ (1 pont). Mivel c valós, c csak -5 lehet (1 pont). Innen $z = (-5)/(5i) = i$, ami az eredeti polinomnak és a deriváltjának is gyöke, és ezért a $c = -5$ tényleg megoldás (1 pont).

6. Legyen $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, ekkor $T(v) = vz + 1$ (1 pont). Ezért ha T-t n-szer alkalmazzuk, akkor (a Horner-elrendezés alapján) $vz^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1$ adódik (2 pont). A mértani sor összegképletét is felhasználva ez akkor egyenlő v-vel, ha $(z^n - 1)/(z - 1) = v(1 - z^n)$. Innen $z^n = 1$ vagy $v = 1/(1 - z)$, feltéve, hogy $z \neq 1$ (2 pont). Ezért az alábbi lehetőségek vannak. Ha $z = 1$ (vagyis $\alpha = k360°$), akkor egyik pont sem lesz piros. Ha $z \neq 1$, de z egységgyök (vagyis α fokokban mérve racionális szög), akkor minden pont piros lesz. A fennmaradó esetben $v = 1/(1 - z)$ az egyetlen piros pont, ez már egy lépésben visszatér önmagába, vagyis T-nek fixpontja (1 pont).