Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Második zárthelyi, **B** *feladatsor (2005. dec. 13.)*

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve, valamint hogy a **B** feladatsorról van szó. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Bontsuk az* $5x^5 + x^4 + 25x^3 + 5x^2 - 25x - 5$ *polinomot* $\mathbb{Q}$ *fölött irreducibilisek szorzatára.*

2. *Van-e olyan* c *egész szám, melyre a*

$$\begin{aligned} 2\,x + y - z &= 0 \\ x + 2\,y - 2\,z &= 1 \\ -1\,x + 4\,y + c\,z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek $\mathbb{C}$ *fölött egyértelmű megoldása van, de* $\mathbb{Z}_{11}$ *fölött nem?*

3. *Irreducibilis-e* $x^6 + x^3 + 1$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *test fölött?*

4. *Igaz-e, hogy* $\Phi_{49}(x) \mid \Phi_7(x^{35})$*?*

5. *Létezik-e (legalább) négy olyan* $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*, melyre* $M^{23} = -M$*?*

6. *Számítsuk ki* $n \geq 1$ *esetén azt a* $2n \times 2n$*-es determinánst, amelyben a főátló csupa* $2n$*, a mellékátló csupa* 1*, az első sor elemei* $2n$*-től* 1*-ig fogynak, az utolsó sor elemei* 1*-től* $2n$*-ig nőnek, a többi elem pedig nulla.*