

Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Első zárthelyi, C feladatsor (2005. okt. 25.)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve, valamint hogy az **A**, a **B** vagy a **C** feladatsorról van-e szó. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a pusztá eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. Van-e olyan $b \in \mathbb{C}$, melyre az $x^{2005} + bx^{10} - 1$ polinom $x^2 + 1$ -gyel osztva $2x - 1$ -et ad maradékul?
2. Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok a komplex számsíkon, melyekre $(z - 1)i/(z - i)$ pozitív valós szám?
3. Legyenek x_1, x_2, x_3, x_4 az $x^4 - 3x + d$ polinom komplex gyökei (a többszörös gyököket, ha vannak, annyiszor felsorolva, ahányszorosak). Tegyük föl, hogy $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$. Következik-e ebből, hogy valamelyik x_i maga is nulla?
4. Léteznek-e olyan ε és η komplex számok, hogy ε rendje 75, η rendje 6, és $\varepsilon\eta^2$ rendje 10?
5. Van-e olyan **valós** c szám, melyre az $x^{16} + 16ix + c$ polinomnak létezik többszörös (komplex) gyöke?
6. Legyen T az a transzformáció a síkon, amely először az origó körül α szöggel forgat, majd a valós tengely negatív irányába egy egységgel eltol. Színezzük be a sík azon pontjait fehérre, amelyekhez van olyan $n > 0$ egész, hogy T -t n -szer alkalmazva ez a pont önmagába megy. Mely α értékekre igaz, hogy van a síkon fehér pont? Melyek azok az α értékek, amikor minden pont fehér lesz?