Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Első zárthelyi, **A** *feladatsor (2005. okt. 25.)*

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve, valamint hogy az **A**, a **B** vagy a **C** feladatsorról van-e szó. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *Van-e olyan* $b \in \mathbb{C}$*, melyre az* $x^{2005} + bx^7 - 1$ *polinom* $x^2 + 1$*-gyel osztva* $2x + 1$*-et ad maradékul?*

2. *Milyen alakzatot alkotnak azok a* z *pontok a komplex számsíkon, melyekre* $(z - i)i/(z - 1)$ *pozitív valós szám?*

3. *Legyenek* x_1, x_2, x_3, x_4 *az* $x^4 - 2x + d$ *polinom komplex gyökei (a többszörös gyököket, ha vannak, annyiszor felsorolva, ahányszorosak). Tegyük föl, hogy* $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$*. Következik-e ebből, hogy valamelyik* x_i *maga is nulla?*

4. *Léteznek-e olyan* ε *és* η *komplex számok, hogy* ε *rendje 12,* η *rendje 21, és* $\varepsilon\eta^2$ *rendje 14?*

5. *Van-e olyan* **valós** c *szám, melyre az* $x^6 - 6ix + c$ *polinomnak létezik többszörös (komplex) gyöke?*

6. *Legyen* T *az a transzformáció a síkon, amely először az origó körül* α *szöggel forgat, majd a valós tengely pozitív irányába egy egységgel eltol. Színezzük be a sík azon pontjait pirosra, amelyekhez van olyan* $n > 0$ *egész, hogy* T*-t* n*-szer alkalmazva ez a pont önmagába megy. Mely* α *értékekre igaz, hogy van a síkon piros pont? Melyek azok az* α *értékek, amikor minden pont piros lesz?*