Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Hetedik feladatsor (2005 nov. 30–∞)

1. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, majd az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a felső háromszög alakra hozás módszerével is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

3. *Egy* 2001×2001*-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?*

4. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

5. *Van-e olyan* $123456789 \times 123456789$*-es mátrix, melyben csak a* 0 *és* 1 *számok szerepelnek, és determinánsa* 2*?*

6. *Legyen* T *test,* $A \in T^{k\times k}$, $B \in T^{m\times m}$, $X \in T^{k\times m}$ *és* O *az* $m \times k$*-s nullmátrix. Rakjuk össze az* M *mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen:* $M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$*. Igazoljuk, hogy* $\det(M) = \det(A)\det(B)$*. Vezessük le ebből az állításból, hogy háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.*

7. *Igazoljuk, hogy ha egy* $n \times n$*-es mátrixban van egy* $m \times k$*-as téglalap csupa nullákból, és* $m + k > n$*, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy* n*-edrendű, komplex elemű determinánsban* a_{ij} *az* a_{ji} *konjugáltja minden* i, j*-re, akkor a determináns értéke valós.*

9. *Hogyan változik a determináns, ha a mellékátlóra tükrözünk?*

10*. *Legyen* M *egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy* M^{-1} *akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha* $\det M \in \{1, -1\}$*.*

11. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a második és harmadik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. *Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátulról előre' permutációban?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

13. *Mutassuk meg, hogy ha f és g permutációk, akkor $sg(gfg^{-1}) = sg(f)$. Vezessük le ebből, hogy minden transzpozíció páratlan permutáció. Mutassuk meg, hogy minden permutáció cserék szorzata, és egy ilyen előállításban a páros permutációknak mindig páros sok, a pártalanoknak mindig páratlan sok tényezője lesz. Igazoljuk, hogy a páros és a páratlan permutációk ugyanannyian vannak (és egy n elemű halmazon ez a szám $n!/2$).*

14. *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a definíció alapján. Mutassuk meg, hogy a háromszor hármas determináns értéke nulla lesz, ha két oszlopa egyenlő, és hogy a háromszor hármas determináns, mint a második oszlopvektorának függvénye, összegtartó. Az előjeles mérték három tulajdonságából vezessük le a determináns definíciójában szereplő képletet 3×3-as, majd általános mátrixokra is.*

15. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

16*. *A sakkbajnokság félidejénél azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány játékost, hogy bármelyik játékos (a közülük valók is) ezek ellen összesen egész számú pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, győzelem: $1-0$, döntetlen: $0.5-0.5$, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*

17.** *Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) \cdot f(\varepsilon_1) \cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1})\,.$$

18*. *Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \ (p)$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \ (p)\,.$$

19. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi három egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x \cdot y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + x \cdot y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y^2 + 1 = 2z \\ z^2 + 1 = 2x \end{cases}$$