

10. Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Az AB , BA , BC , $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

12. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i -edik sorában a j -edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorozunk $E^{(ij)}$ -vel? Van-e olyan 3×3 -as A mátrix, amellyel a bal- vagy a jobbszorítás tetszőleges 3×3 -as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja?

13. Adjunk meg olyan 10×10 -es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100 -as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100 -as C -re teljesüljön?

14. Számítsuk ki az 5×5 -ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ -es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

15. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?

16. Az M és N mátrixok **felcserélhetőek**, ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat a háromszor hármás mátrixokat, amelyek minden háromszor hármás mátrixszal felcserélhetőek.

17. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

18. Legyenek A és B $n \times n$ -es mátrixok, számítsuk ki $\text{tr}(AB - BA)$ értékét.

19. Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)E = 0$.

20. Megoldható-e $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben az $X^2 = -E$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = E$ egyenlet összes megoldását. Keressünk olyan mátrixokat, melyek négyzete nulla.

21. Legyen $M, N \in T^{n \times n}$ (ahol T test). Igazoljuk az alábbiakat.

- Ha $MN = M$ és $NM = N$, akkor mindkét mátrix **idempotens** (azaz $N^2 = N$, illetve $M^2 = M$).
- Ha M idempotens, akkor $N = I - M$ is az, és $MN = NM = 0$.
- Az M akkor és csak akkor **involúció**, azaz $M^2 = I$, ha $(I + M)(I - M) = 0$.
- Ha M **nilpotens** (azaz négyzetes, és van olyan m természetes szám, amire $M^m = 0$), akkor $(I - M)$ -nek létezik inverze.

22*. Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.