Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Ötödik feladatsor (2005 nov. 16–23)

1. *Döntsük el az alábbi $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezésekről, hogy művelettartóak-e.*
a) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^+$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
b) $G_1 = G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = |x|$ *(abszolút érték).*
c) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.
d) $G_1 = \mathbb{R}^+$, $G_2 = \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$.
e) $G_1 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $G_2 = \mathbb{Z}_{100}^+$, $\varphi(x) = 60x$.
f) $G_1 = \mathbb{R}[x]$ *mint gyűrű,* $G_2 = \mathbb{C}$ *mint gyűrű,* $\varphi(f) = f(i)$.

2*. *Igazoljuk, hogy az* $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *és* $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *testek nem izomorfak (a műveletek mindkét esetben a szokásos* $\mathbb{C}$*-beli összeadás és szorzás).*

3. *Mutassuk meg, hogy a mod* m *maradékképzés* $\mathbb{Z}$*-ből* $\mathbb{Z}_m$*-be művelettartó (mindkét gyűrűműveletre). Vezessük le ebből, hogy* $\mathbb{Z}_m$ *gyűrű.*

4. *Ha* R *és* S *gyűrűk, és* $\varphi : R \to S$ *gyűrűhomomorfizmus, akkor mutassuk meg, hogy* $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto \varphi(a_0) + \varphi(a_1)x + \cdots + \varphi(a_n)x^n$ *is homomorfizmus* $R[x]$*-ből* $S[x]$*-be.*

5. *Legyen* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *egy* n*-edfokú polinom, ahol* $n \geq 1$, p *egy prímszám, és* $0 < k < n$. *Legyen* $\overline{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$ *az* f *modulo* p *véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*
a) *Ha* f *irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett, akkor* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett.*
b) *Ha* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett, akkor* f *irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *illetve* $\mathbb{Q}$ *felett.*
c) *Ha* $\overline{f}$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}_p$ *felett, és* $\overline{f}$ *foka* n, *akkor* f *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett.*
d) *Ha* f*-nek van* $\mathbb{Z}$ *felett* k*-adfokú tényezője, akkor* $\overline{f}$*-nak is van* k*-adfokú tényezője.*
e) *Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy* $\overline{f}$ *foka* n.
Adjunk az első Gauss-lemmára és a Schönemann-Eisenstein-tételre új bizonyítást a polinom mod p *vizsgálatával.*

6. *Fogalmazzuk meg precízen, és bizonyítsuk is be, milyen értelemben egyértelmű egy egész együtthatós polinom felbontása egy egész szám és egy primitív polinom szorzatára. Mennyiben egyértelmű egy racionális együtthatós polinom felbontása egy racionális szám, és egy (egész együtthatós) primitív polinom szorzatára?*

7. *Mutassuk meg, hogy az* $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ *polinomok* $\mathbb{Z}[x]$*-beli legnagyobb közös osztója a következő módon határozható meg. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust* $\mathbb{Q}$ *felett, a kapott racionális együtthatós polinomot írjuk fel* rh *alakban, ahol* $r \in \mathbb{Q}$ *és* $h \in \mathbb{Z}[x]$ *primitív polinom. Határozzuk meg* f *és* g *együtthatóinak legnagyobb közös osztóját, az eredmény ennek a számnak a* h*-szorosa. Hogyan módosítható ez az eljárás, ha két* $\mathbb{C}[x, y]$*-beli polinom legnagyobb közös osztóját keressük?*

8. *Legyenek* a *és* b *invertálható elemek egy asszociatív, egymás mellé írással jelölt műveletre nézve, és* m, n *egész számok. Mutassuk meg a következőket.*
a) a^{-n} *az* a^n *inverze (az* a^{-n} *definíció szerint* $((a^{-1})^n$, *ha* n *pozitív egész).*
b) $a^m a^n = a^{m+n}$.
c) $(a^m)^n = a^{mn}$.
d) *Ha* a *és* b *felcserélhető, azaz* $ab = ba$, *akkor* $(ab)^n = a^n b^n$.

9. *Legyen $\circ$ asszociatív művelet az A halmazon, és $a, b, c, d, e \in A$.*
a) Mutassuk meg, hogy $[(a \circ b) \circ (c \circ d)] \circ e = a \circ [\{(b \circ c) \circ d\} \circ e]$.
b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges szorzat értéke független a zárójelezéstől.*

10. *Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

11. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

12. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

13. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát. Általánosítsuk a feladatot!*

14*. *Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki ennek alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat, ha $n = 36, 72, 144, 100$.*

15*. *Legyen p prímszám, és $n = p^k m$, ahol már $p \nmid m$. Mutassuk meg, hogy modulo p a Φ_n egyenlő a $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ polinommal.*

16*. *Igazoljuk, hogy a Φ_n polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann-Eisenstein, ha n prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.*

17. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

18. *Mutassuk meg tetszőleges test felett, hogy ha az f polinomnak van többszörös tényezője (azaz g^2 alakú osztója, ahol g nem konstans polinom) akkor $(f, f') \neq 1$. Mely p prímekre igaz, hogy $x^n - 1$-nek van többszörös tényezője $\mathbb{Z}_p$ felett?*

19. *Lehet-e egy $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben?*

20*. *Általánosítsuk az interpolációt többváltozós polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény. Mutassuk meg, hogy véges test felett nem érvényes a polinomok azonossági tétele. Adjunk meg minden véges test felett olyan polinomot, amelynek nincs gyöke az adott testben.*

21. *Igazoljuk, hogy az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakú számok alkotta gyűrű hányadosteste „valójában" az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok teste.*

22*. *Legyen $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $\mathbb{C}[y]$-beli polinomokból képzett törtekből álló testet.*
a) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ feletti polinom?
b) Következik-e a Schönemann-Eisenstein tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ felett?
c) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x, y]$-ban?

23*. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.*