Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Negyedik feladatsor (2005 okt. 26 – nov. 15)

1. *Igaz-e a* $2x \mid 3x^2$ *oszthatóság rendre a* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *feletti polinomok körében?*

2. *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{Z}[x]$*-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3. *Határozzuk meg* $\mathbb{R}[x]$*-ben,* $\mathbb{Q}[x]$*-ben, illetve* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az egységeket. Teljesül-e* $\mathbb{R}[x]$*-ben,* $\mathbb{Q}[x]$*-ben, illetve* $\mathbb{Z}[x]$*-ben, hogy az irreducibilis polinomok pontosan azok a nem nulla és nem konstans polinomok, amelyek nem bonthatók alacsonyabb fokú polinomok szorzatára?*

4. *Bontsuk fel a* $6(x^2-2)(x^2+1)$ *polinomot* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára.*

5. *Adjuk meg a* $2x^3+3x+5$ *polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom* $\mathbb{Q}$ *felett.*

6. *Felbonthatatlan-e* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az* x^4+x+1 *polinom? És* $\mathbb{R}[x]$*-ben?*

7. *Irreducibilis-e* x^4+4 *illetve* x^4+9 *a* $\mathbb{Q}$ *felett? Általánosítsunk!*

8. *Bontsuk fel az* x^4-10x^2+1 *polinomot* $\mathbb{R}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a* $\mathbb{Q}$ *feletti felbontást is.*

9. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium:* $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ *(mely* n*-ekre?).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha* p *prímszám, akkor az* $(x+y)^p-x^p-y^p$ *polinom osztható* p*-vel* $\mathbb{Z}[x,y]$*-ban.*

11. *Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein a* $\Phi_p(x+1)$ *polinomra, ahol* p *prímszám?*

12. *Irreducibilis-e* $\mathbb{Q}$ *felett* x^3+9, x^4+1, x^4-2x+1, x^4+4x+1, $x^{10}-x^5+1$*?*

13. *A* $6x^4-9x+1$ *polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

14. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*
a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* x^7+x+1, x^2-2, x^2+x+1.
b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4.

15*. *Igazoljuk, hogy az* $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ *polinom irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett, ha* $a_1,\dots,a_n$ *páronként különböző egész számok.*

16*. *Van-e olyan* $f(x)$ *egész együtthatós polinom, hogy minden* $g(x)$ *egész együtthatós polinomra az* $f\big(g(x)\big)$ *polinom irreducibilis legyen* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

17. *Bizonyítsuk be, hogy a kitüntetett közös osztó asszociáltság erejéig egyértelmű. Definiáljuk a kitüntetett közös többszörös fogalmát, mutassuk meg, hogy ez is egyértelmű, és adjunk rá képletet a kanonikus alak segítségével.*

18. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{Q}$, és $a \neq 0$, akkor tetszőleges $f \in \mathbb{Q}[x]$ akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, ha $f(ax+b)$ az. Igaz-e a megfelelő állítás $\mathbb{R}$ felett?*

19. *Az alábbi struktúrák gyűrűk-e?Ha igen, kommutatívak-e, egységelemesek-e, nullosztómentesek-e, testek-e? A kommutatív gyűrűkben határozzuk meg az invertálható elemeket.*

a) $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ *a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

b) *$\mathbb{C}[x]$ páros fokú elemei és a 0 a polinomok szokásos összeadására és szorzására nézve.*

c) *$\mathbb{R}[x]$ legalább huszadfokú elemei és a 0 a szokásos összeadásra és szorzásra nézve.*

d) *$\mathbb{C}[x]$ elemei a szokásos összeadásra, és a kompozícióra, mint szorzásra.*

e) *Tetszőleges Abel-csoport, a szorzást úgy definiáljuk, hogy minden szorzat nulla.*

f) *Egy X halmaz összes részhalmaza, ahol az összeadás a szimmetrikus differencia képzése, a szorzás pedig a metszetképzés.*

20. *Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.*

a) *Ha $\circ$ kétváltozós művelet egy A halmazon, akkor csak egy neutrális eleme lehet.*

b) *Ha e neutrális elem a $\circ$ kétváltozós asszociatív műveletre nézve, akkor minden elemnek legfeljebb egy (kétoldali) inverze lehet (e-re nézve).*

c) *Ha S gyűrű, és 0 az összeadás neutrális eleme (azaz S nulleleme), akkor tetszőleges $s, t \in S$ esetén $s * 0 = 0 * s = 0$ és $(-s) * t = s * (-t) = -(s * t)$.*

d) *Egy egységelemes R gyűrű invertálható elemei a szorzásra nézve csoportot alkotnak.*

21. *Legyen p prímszám, és R kommutatív gyűrű, amelyben minden elem p-szerese nulla. Mutassuk meg, hogy $(r+s)^p = r^p + s^p$ teljesül minden $r, s \in R$ esetén. Vezessük le ebből a kis Fermat-tételt.*

22. *Végezzük el $\mathbb{Z}_{17}$-ben a $2/3$ és az $5/12$ osztásokat. Mutassuk meg, hogy ez egy test.*

23. *Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{Z}_n$ gyűrű akkor és csak akkor nullosztómentes, ha n prímszám, és ebben az esetben test is.*

24. *Mely m-ekre van $\mathbb{Z}_m[x]$-ben olyan polinom, amelynek több gyöke van, mint a foka?*

25. *Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{Z}_2$ felett.*

26. *Bontsuk az $x^{12}-1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_5$ felett.*

27. *Az $x^4+x^3+x^2+1$ polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett.*

28. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) *$\mathbb{Z}_2$ felett* x^8+x^2+1, x^5+x+1, $x^5+x^4+x^3+1$, x^5+x^3+1.

b) *$\mathbb{Z}_{17}$ felett* x^2+1, x^4+1, x^8+1, $x^{17}+1$, $x^{17}+2$.

c) *$\mathbb{Z}$ felett* $x^4+2x+27$, $3x^7+6x-18$, x^6+1, x^3+7x-3, $x^4+3x^3+x^2+1$.

29. *Legyen $\varphi : G \to H$ művelettartó leképezés a G illetve H csoportok között. Mutassuk meg, hogy φ a G csoport egységelemét a H egységelemébe képzi, és ha $g \in G$, akkor g inverzének képe ugyanaz, mint g képének inverze (vagyis φ az inverzképzést is tartja).*