Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Harmadik feladatsor (2005 okt. 4–13)

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*
a) $(x^3 + 3x^2 + 2) - (x^3 + 3x - 4)$.
b) $(x^2 + ix + 3)(x^2 + i)$.

2. *A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az* $f(x) = x^6 - 4x^4 + x^3 - x^2 + 4$ *polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel* $f(x)$*-et* $(x-2)g(x) + f(2)$ *alakban.*

3. *Hányszoros gyöke az* $x^4 - x^3 - x + 1$ *polinomnak az* 1*? A Horner-elrendezést használjuk.*

4*. *Igazoljuk, hogy ha az* f *polinomba a Horner-elrendezéssel helyettesítjük be a* b *számot, akkor* $f(x) = (x-b)g(x) + f(b)$*, ahol* g *együtthatói az alsó sorban szereplő számok.*

5. *Írjuk fel az* $x^4 + 4$ *polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

6. *Adjuk meg az összes olyan* $\mathbb{Q}[x]$*-beli tizedfokú polinomot, melynek az* i *ötszörös gyöke.*

7*. *Mutassuk meg, hogy ha* $f \in \mathbb{R}[x]$ *és* $z \in \mathbb{C}$*, akkor* z *és* $\overline{z}$ *ugyanannyiszoros gyöke* f*-nek. Igazoljuk, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.*

8. *Mutassuk meg, hogy ha két* n*-edfokú komplex együtthatós polinom* n *(komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

9. *Legyenek* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *az összes* n*-edik egységgyökök.*
a) *Bizonyítsuk be, hogy* $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1) \ldots (x - \varepsilon_n)$.
b) *A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.*
c) *Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos* n*-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

10. *Határozzuk meg a* $2x^4 + 2x + 3$ *polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

11. *Legyenek* a, b, c *az* $x^3 + 3x + 1$ *polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei* a^2, b^2, c^2*, illetve* $a + b$*,* $a + c$*,* $b + c$*.*

12. *Adjunk meg olyan polinomot, amelyre* $f(0) = 3$*,* $f(1) = 3$*,* $f(4) = 15$ *és* $f(-1) = 0$*.*

13. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy* f *racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális” helyett mindenütt „egész” szerepel?*

14*. *Létezik-e olyan* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *polinom, melyre* $f(10) = 400$*,* $f(14) = 440$ *és* $f(18) = 520$*?*

15*. *Tegyük fel, hogy* n *egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb* $n-1$*-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

16. *Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.*

17. *Mi lesz a maradék, ha az $x^4 + x^2 + 1$ polinomot elosztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

18. *Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel illetve $x^2 - 1$-gyel?*

19. *Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a szokásos visszahelyettesítési eljárással) $fp + gq$ alakban, ahol p és q alkalmas polinomok.*

20. *Határozzuk meg az $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ polinom többszörös gyökeit.*

21. *Mely $b \in \mathbb{C}$ értékekre van az $x^n + bx^k + 1$ polinomnak háromszoros gyöke?*

22. *Elvégezhető-e $\mathbb{Z}[x]$-ben az $x : 2$ maradékos osztás?*

23. *Vezessük le a gyöktényező kiemelhetőségéről szóló állítást a maradékos osztás tételéből.*

24*. *Igazoljuk, hogy egy polinom gyökeinek a multiplicitása egyértelműen meghatározott (vagyis az $f(x) = (x - b)^k g(x)$, $g(b) \neq 0$ definíció adott f és b mellett csak egyetlen k-ra teljesülhet). Mutassuk meg, hogy a polinomok kanonikus alakjában szereplő kitevők éppen a megfelelő gyökök multiplicitásai a most idézett definíció értelmében is.*

25.** *Az n-edfokú $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább n-szeres gyöke az $[f']^2 - ff''$ polinomnak?*

26.** *Legyen f valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy f előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

Az $rx_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ *foka* $m_1 + \cdots + m_n$. Egy polinom foka a legnagyobb fokú tagjának a foka. Ha minden tag foka ugyanaz, akkor a polinom *homogén.*

27. *Az alábbi p polinomot bontsuk homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot. Helyettesítsük be mindegyik x_i helyére a négy határozatlanú σ_i elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^3 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4 \,.$$

28. *Egy 3-határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$. Lehet-e neki tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk fel, mi az eljárás első lépése?*

29. *Jelölje egy tetszőleges f polinom k-adfokú homogén komponensét f_k. Mutassuk meg, hogy az fg polinom k-adfokú homogén komponense $f_0g_k + f_1g_{k-1} + \cdots + f_kg_0$. Bizonyítsuk be, hogy többhatározatlanú polinomok szorzásakor a fokok összeadódnak.*

30. *Igaz-e, hogy szimmetrikus polinom minden homogén komponense is szimmetrikus?*

31. *Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).*

32. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i^2 x_j$ összeget.*