Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Második alkalom (2005 szept. 19–21)

1. *Adjuk meg az* $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^6 = 1 + i$, $x^n = -1$ *egyenletek összes megoldását.*

2. *Mivel egyenlő* $\binom{2005}{0} + \binom{2005}{4} + \binom{2005}{8} + \binom{2005}{12} + \ldots$ *?*

3. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et.*

4*. *Hozzuk zárt alakra a* $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ *összeget.*

---

5. *Tekintsük az* 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ *számokat. Mennyi ezek rendje? Melyek egységgyökök? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

6. *Ha* ε *rendje osztható néggyel, mi lesz* $-\varepsilon$ *rendje?*

7. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha* $n > 0$ *egész,* $\varepsilon \in \mathbb{C}$, *és* $\varepsilon^n = i$, *akkor* $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

9. *Mutassuk meg, hogy ha* n *páratlan pozitív egész, akkor a* $2n$*-edik primitív egységgyökök épp az* n*-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis* n *számokra ellenőrizzük).*

10. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

11. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek.*
 a) Hány közös gyöke van az $x^n = 1$ *és* $x^m = 1$ *egyenleteknek?*
 b) Igazoljuk, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik egységgyök szorzata* nm*-edik egységgyök.*
 c) Mutassuk meg, hogy egy n*-edik és egy* m*-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor* nm*-edik primitív egységgyök, ha* m *és* n *relatív prímek.*

12. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

13. *Határozzuk meg a primitív tizenkettedik egységgyökök összegét és szorzatát.*

14. *Mutassuk meg, hogy a* z_1, z_2, z_3, z_4 *páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a* $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \Big/ \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ *kifejezés valós szám.*

15. *Igazoljuk komplex számok felhasználásával Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre* a, b, c, d, *átlóinak hossza pedig* e *és* f, *akkor* $ac + bd \geq ef$, *és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*

---

16. *Egy* 8×8*-as sakktáblából kitörjük az egyik átló két végpontján lévő két sarokkockát. Lefedhető-e a kapott alakzat* 2×1*-es dominókkal (egyrétűen és hézagmentesen)?*

17. *Igazoljuk, hogy egy* 100×100*-as sakktábla nem fedhető le* 8×1*-es dominókkal. Általánosítsuk a feladatot más méretű sakktáblára és dominókra.*

18. *Egy könyvért már kifizettem ezer forintot, de még fizetnem kell érte annyit, amennyit akkor kellene még fizetnem, ha már kifizettem volna annyit, amennyit most még fizetnem kell. Mennyibe kerül a könyv?*

19. *Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepelnek az* $1, 3, 4, 8, 9$ *számjegyek?*

20. *Hány olyan* 2005 *jegyű szám van, amelyben az utolsó kivételével minden számjegy egyenlő a közvetlenül utána következő, egyforma számjegyek számával? (Például* 12115 *ilyen ötjegyű szám.)*

21. *Egy szállodában hárman kivesznek egy szobát, és harminc dollárt fizetnek. Mivel a szoba csak* 25 *dollárba kerül, a recepciós felküldi a londinert öt dollárral, aki kettőt zsebrevág, és csak egy-egy dollárt ad át a három vendégnek. Így mindhárman csak kilenc dollárt fizettek, ez* 27*, és a londinernél van még két dollár. Hol a harmincadik dollár?*

22. *Egy csokoládéfajtában minden tábla csokoládé mellé egy cetlit is csomagoltak. Aki 10 cetlit bevitt a boltba, az egy új csomagot kapott (amelyben egy tábla csokoládé és egy cetli volt). Egy csomag* $10/9$*, vagy* $1,1111\ldots$ *tábla (cetli néküli) csokoládét ér?*

23. *Budapestről és Hatvanból egymással szemben egyszerre indul egy 6 km/h sebességű gyalogos és egy 20 km/h sebességű kerékpáros. Induláskor a kerékpáros orráról 30 km/h sebességgel felrepül egy légy, amely rászáll a gyalogos orrára. Ott azonnal megfordul, majd visszarepül kerékpároshoz. És így tovább, az összeütközésig. Mennyi utat tesz meg a légy?*

24. *Anettkának húsz tolla van, köztük piros is. Bármely öt toll között van két egyforma színű, és bármely tíz között legfeljebb öt egyforma színű lehet. Hány piros tolla van?*

25. *Van két gyújtózsinórunk, mindkettő* 60 *perces, de nem égnek egyenletesen (például nem biztos, hogy* 30 *perc alatt félig égnek el). Hogyan mérhetünk ki* 45 *perc időtartamot?*

26. *Egy* 15 *és egy* 20 *perces homokórával mérjünk ki* 25 *percet.*

27. *Van* 81 *egyforma érménk, de az egyik hamis, könnyebb a többinél. Egy (súlyok nélküli) kétkarú mérleggel hány méréssel tudjuk megtalálni a hamisat?*

28. *Ronaldo gólörömében felugrál a lelátó tizedik sorába. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha akárhányat, és egyszerre akárhány sornyit ugorhat? És ha tudjuk, hogy hármat ugrik?*

29. *Tíz ember mindegyike ismer egy-egy pletykát. Hány telefonhívással tudják elérni, hogy mindenki mindegyik pletykát megismerje? (Konferenciahívás nincs!)*

30. *Bontsunk egy négyzetet* 3×3 *egybevágó kisebb négyzetre. Hányféleképpen lehet ezek közül négyet kiválasztani úgy, hogy a négyzet szimmetriáival egymásba átvihető kiválasztásokat nem tekintjük különbözőnek?*

31. *A síkra véges sok egyenest rajzolunk, ezek a síkot részekre bontják. Mutassuk meg, hogy e részeket ki lehet színezni két színnel úgy, hogy a szomszédosak különböző színűek legyenek. Két részt akkor tekintünk szomszédosnak, ha a közös határuk tartalmaz szakaszt.*

32. *Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot* n *egyenes?*

33. *Adott a síkon* 2005 *pont úgy, hogy bármely kettő összekötő egyenesén van még legalább egy a megadott pontok közül. Bizonyítsuk be, hogy az összes pont egy egyenesen van.*