Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Első alkalom (2005 szept. 12–14)

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket:* $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{2005}$, $|(1+2005i)^{100}/(1-2005i)^{100}|$.

2. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.*
 a) $x^2+1=0$.
 b) $x^2=-12$.
 c) $x^2+2x+2=0$.
 d) $x^2+2ix-1=0$.

3. *Határozzuk meg azokat a* $c+di$ *számokat, melyek négyzete* $20i-21$. *Oldjuk meg az* $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ *egyenletet.*

4. *Rajzoljuk le a komplex számsíkon a következő halmazokat:* $\{z : \mathrm{Re}(z+2i)\le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z+1)\ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$, $\{z : |z-i-1|\le 3\}$, $\{z : |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, $\{z : z+\overline{z}=-1\}$, $\{z : 2z+5=2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z=\overline{z}\}$, $\{z : (1/z)+8=\overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}((z-1)/(z+1))=0\}$, $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}((z-1)/(z+1))=0\}$.

5. *Hol a hiba a következő levezetésben:* $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$.

6. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$.

7. *Oldjuk meg az* $x^3=1$ *és az* $x^4=-4$ *egyenleteket a komplex számok között.*

8. *A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései:* $z\to 3z+2$, $z\to(1+i)z$, $z\to 1/\overline{z}$.

9. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

10. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

11. *Melyik természetes számmal egyenlő* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$?

12. *Hozzuk ki az* $x^3-21x+20=0$ *egyenlet összes (valós) megoldását a Cardano-képletből.*

13. *Számítsuk ki az* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ *egyenlet esetében azokat a* w *értékeket, melyekre az* $x\to x+w$ *helyettesítés eltünteti az* x *illetve az* x^2 *együtthatóját.*

---

14. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között:* $x^2=i$, $x^2+3x+4=0$, $x^2-(2+i)x+7i-1=0$, $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$, $x=(3+2i)\overline{x}$, $x=2\cdot\mathrm{Re}(x)$.

15. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*

16****.** *Tekintsük az* $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ *(ahol* $ad-bc\neq 0$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$*) leképezést a komplex síkon. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor képezi az egységkör belsejét önmagára, ha* $f(z)=k(z-\alpha)/(1-\overline{\alpha}z)$ *alakban írható, ahol* $|k|=1$, $|\alpha|<1$, $k,\alpha\in\mathbb{C}$.

Az alábbiakban olyan feladatok következnek, amelyek segítségével át lehet ismételni az általános- és középiskolában tanult, elsősorban logikai és algebrai dolgokat.

17. *Erich Kästner: Emil és a három iker című művében a nagymama ezt mondja: „Ha ez a ripacs fővárosi kabarékban lépett fel, akkor én vagyok a gerolsteini nagyhercegnő!" Igazat mondott-e (ha feltételezzük, hogy a ripacs nem lépett fel a fővárosban, és a nagymama nem a gerolsteini nagyhercegnő)?*

18. *Helyes-e a „ha n hattal osztható, akkor páros" következtetés minden n-re? Mi a helyzet $n = 6, 8, 9$ esetén?*

19. *Egy matematikus csoport résztvevőiről tudjuk, hogy bármely 14 diák között van legalább 6 fiú, és bármely 20 diák között van legalább 8 lány. Maximum hány diák járhat a csoportba? Eleget tesz-e a feltételeknek egy olyan csoport, amelyben összesen csak 4 fiú és 4 lány van? És egy olyan, ahol 10 lány van, fiú pedig nincs?*

20. *A táblára felírjuk az egész számokat 1-től 2005-ig. Egy lépésben két számot mindig letörlünk, és helyettük fölírjuk a különbségüket (ez lehet negatív is). Lehetséges-e, hogy a végén maradó egyetlen szám a 22?*

21. *A Rubik-kocka lapjain található 54 kis négyzet közül hányat lehet maximum kiválasztani úgy, hogy semelyik kettőnek még csak közös csúcsa se legyen?*

22. *Egy tábla csokoládé $10 \cdot 30$ kis téglalapra van osztva. A csokoládét szét szeretnénk törni ezekre a kis darabokra úgy, hogy mindig kezünkbe veszünk egy darabot, és egy osztás mentén eltörjük. Milyen stratégiával csináljuk, hogy a lehető legkevesebb törést kelljen elvégezni?*

23. *Egy asztal körül 30 gyerek ül, egyikük előtt 30 szelet csokoládé van, a többieknél semmi. Egy lépésben egy olyan gyerek, akinél legalább két csokoládé van, átadhat két csokoládét az egyik szomszédjának, vagy egy-egy csokoládét mindkét szomszédjának. El tudják-e érni, hogy a végén mindenkinél egy csokoládé legyen?*

24. *Egy matematikus annyit dolgozott a szobájában, hogy a kertjében támadásnak indult a parlagfű. A négyzet alakú kert 10×10 négyzet alakú parcellára van osztva. Ha az egyik parcella két oldalszomszédja már elgazosodott, akkor a következő napon ez is gazos lesz. A matematikus kinézett az ablakon, és látta, hogy kilenc parcellán gaz nőtt. Legyintett: nem baj, még jövőre is lesz hova kifeküdnöm. Honnan tudta?*

25. *Paganel, a szórakozott földrajztudós minden évben egy véletlenszerűen választott napon elhatározza, hogy utazni fog. Minden hónapban érkezik két hajó egy-egy napon. Mindkettő egy napig vesztegel, majd továbbindul, az egyik Indiába, a másik Dél-Amerikába. Paganel mindig arra a hajóra száll föl, amelyik legközelebb megérkezik. Mégis azt tapasztalja, hogy az esetek döntő részében Dél-Amerikában köt ki. Hogyan lehetséges ez?*

26. *Egy szigeten 200 abszolút intelligens oroszlán él, akiknek semmi ennivalójuk nincs. Ledobnak helikopterről egy adag húst, amibe altató van injekciózva (ezt az oroszlánok tudják). Ha egy oroszlán megeszi a húst, akkor elalszik, és egy másik oroszlán felfalhatja (de akkor az is elalszik, és így tovább). Az oroszlánok inkább éhen halnak, mint hogy álmukban megegyék őket. A húst is, egy alvó oroszlánt is mindig csak egyetlen oroszlán eheti meg teljes egészében. Mi fog történni? És ha 201 vagy 202 oroszlán van?*