Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Második zárthelyi (2004. május 20) — megoldásvázlatok

1. Ebben a H részcsoportban benne van $T^{-1}TF^6 = F^6$, és ezért ennek inverze, vagyis F^2 is. Ezért megkapjuk az összes F^i és TF^i alakú elemet, ahol i páros (3 pont). Ezek száma 8. Ezért a keresett részcsoport vagy ez, vagy ennél nagyobb, ez utóbbi esetben Lagrange tétele miatt csak az egész D_8 lehet. Mindkét esetben normálosztót kapunk, az elsőben azért, mert az index kettő (3 pont). (Természetesen könnyű látni, hogy az első eset áll fenn, vagyis a felsorolt nyolc elem részcsoportot alkot, a feladat megoldásához azonban ezt nem szükséges ellenőrizni, a Lagrange-tételt használó gondolatmenet kevesebb számolással jár.)

2. Bontsuk fel a csoportot prímhatványrendű ciklikusok direkt szorzatára. Egy 36 rendű elem komponensei között kell lennie 4-gyel és 9-cel osztható rendűnek is. Ezek mindketten maximális prímhatvány-osztói a 180-nak, és ezért a felbontásban szerepelnie kell egy 4 és 9 rendű tényezőnek, vagyis a csoport $\mathbb{Z}_4^+ \times \mathbb{Z}_9^+ \times \mathbb{Z}_5^+$, különben a 36 rendű elemek száma nulla (3 pont). Ez maga is ciklikus, hiszen a szereplő indexek páronként relatív prímek. Egy 180 rendű ciklikus csoportban $\varphi(36) = 12$ darab 36 rendű elem van (3 pont).

3. Ez egy szabályos ötszög alapú hasáb éleiből kapott gráf. Az ötszög forgatásai, illetve az alsó és felső „lap” cseréje segítségével bármely csúcs bármelyikbe átvihető, tehát a hatás tranzitív (3 pont). Ha az A csúcsot fixáljuk, akkor az őt tartalmazó ötszög is fix, mert a gráfnak csak két öt hosszú köre van. Ezért az A szomszédai e körön vagy helyben maradnak, vagy helyet cserélnek. A helycsere lehetséges egy „síkra tükrözéssel”. Ha a két szomszéd helyben marad, akkor már minden pont fix, ezért a szimmetriák száma $10 \cdot 2 = 20$ (3 pont).

4. A második permutációt $(356)(124)$ alakban is írhatjuk, és így $(1364)(25)$ megfelelő lesz a konjugálás tanult képlete miatt (6 pont). (Ugyanígy jó az $(15)(26)$ is: igazából a (34) lenne a legegyszerűbb, csak sajnos az páratlan permutáció. De a (34) helyett az $(15)(26)$ nyilván ugyanarra az eredményre vezet. Megjegyezzük, hogy A_6-ban az összes $(abc)(def)$ elem egyetlen konjugáltosztályt alkot. Ez következik abból, hogy $(123)(456)$ centralizátorában van páratlan permutáció, például ennek az elemnek az egyik „négyzetgyöke”, vagyis (142536), lásd a jegyzetben a 4.7.7. Gyakorlat megoldását.)

5. A $\mathbb{Z}_{35}^\times/N$ akkor és csak akkor izomorf a Klein-csoporttal, ha rendje 4, és minden elemének a négyzete az egységelem. Mivel $\mathbb{Z}_{35}^\times$ rendje $\varphi(35) = 24$, ez azzal ekvivalens, hogy N rendje $24/4 = 6$, és N tartalmazza $\mathbb{Z}_{35}^\times$ minden elemének a négyzetét. A $\pm i$ számokat négyzetre emelve, ahol $1 \leq i \leq 17$ és $(i, 35) = 1$, az $1, 4, 9, 11, 16, 29$ elemeket kapjuk. Ezek tehát részcsoportot alkotnak, és mivel ez hat elem, ezt választhatjuk N-nek (6 pont). (Megjegyezzük, hogy N-et a 4 generálja, és így N elemeit a 4 hatványozásával is megkaphattuk volna. Ebben az esetben ellenőrizni kell, hogy minden elem négyzete N-ben van, ehhez azonban elég $\mathbb{Z}_{35}^\times$ egy generátorrendszerét négyzetre emelni.)

6. Igen. Ha G szép, akkor minden elemének a C centralizátora legfeljebb kettő indexű. Ezért $g \in G$ esetén $g^2 \in C$ (hiszen ha g és g^2 is a $G - C$ mellékosztályban lenne, akkor $g^{-1}g^2 \in C$, ami lehetetlen). De a centralizátorok metszete $Z(G)$, tehát $g^2 \in Z(G)$. Ha $o(g)$ páratlan, akkor g^2-nek g hatványa, és így $g \in Z(G)$ (6 pont). Beláttuk, hogy $G/Z(G)$ minden elemének a négyzete az egységelem. Így ez Abel-csoport, és az alaptétel miatt $G/Z(G)$ a $\mathbb{Z}_2^+$-nak direkt hatványa (4 pont). A megfordításra $D_4 \times D_4$ ellenpélda (2 pont).