Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Első zárthelyi (2004. ápr. 1) — megoldásvázlatok

1. A sajátértékek 0, 5 és -5, ezért a négyzetösszeg alak $0|y_1|^2+5|y_2|^2-5|y_3|^2$, ami indefinit (4 pont). A sajátvektorokat kiszámítva

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{3x_2}{5} - \frac{4ix_3}{5} \\ y_2 &= \frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{4ix_2}{5\sqrt{2}} + \frac{3x_3}{5\sqrt{2}} \\ y_3 &= \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{4ix_2}{5\sqrt{2}} - \frac{3x_3}{5\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

2. Az eredmény a következő: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6a_{n-1} & a_n \\ -6a_n & a_{n+1} \end{pmatrix},$$

ahol $a_n = 3^n - 2^n$.

3. Az altérben mindenképpen van első, másod- és harmadfokú polinom. Ezek fokai különbözőek, és így függetlenek. Ezért a dimenzió legalább három. Benne van továbbá az $x+1-(x-\lambda) = \lambda+1$ polinom is. Ha ez nem nulla, akkor nulladfokú, és így a dimenzió (legalább) négy. Ha nulla, vagyis ha $\lambda = -1$, akkor $x-\lambda = x+1$, és így a dimenzió három.

4. Egy b_1, b_2, b_3, b_4 ortonormált bázisban legyen $Ab_1 = b_3$, $Ab_2 = b_4$, $Ab_3 = Ab_4 = 0$ (ilyen A létezik az előírhatósági tétel miatt). Ekkor $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(A) = \langle b_3, b_4 \rangle$. De nyilván $\mathrm{Im}(A)^\perp \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^4$.

5. Csak a nulla sajátérték, hiszen ez a minimálpolinom egyetlen gyöke. A Jordan-alakban van 3×3-as blokk, mert a minimálpolinom x^3. Emellett vagy egy 2×2-es, vagy két 1×1-es blokk lehet. Az első esetben a (nullához tartozó) sajátaltér dimenziója 2, a másodikban 3.

6. Igen. Tegyük fel ugyanis, hogy $Av = 0$. Ekkor $\langle Av, v\rangle = 0$ és $\langle v, Av\rangle = 0$ is teljesül. Az előbbiből $\langle v, A^* v\rangle = 0$, összeadva $\langle v, (A+A^*)v\rangle = 0$. De $Q(v) = \langle v, (A+A^*)v\rangle$ pozitív definit kvadratikus alak, hiszen az $A + A^*$ önadjungált mátrix minden sajátértéke pozitív. Ezért $v = 0$. Tehát A injektív, és így determinánsa nem nulla.