Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév
Első zárthelyi (2002. ápr. 1)

Minden feladatot **külön lapra** írjunk, és mindegyik lapon legyen rajta a **szak**, a **szerző** és a **gyakorlatvezető** neve. Valamennyi feladatban **indoklás szükséges**, a puszta eredményért nem jár pont, a maximális pontszám minden feladatra 6 pont. Az osztályzat nem kisebb a teljesen megoldott példák számánál.

1. *A komplex feletti* $-4i\overline{x_1}x_2 + 4i\overline{x_2}x_1 + 3\overline{x_1}x_3 + 3\overline{x_3}x_1$ *kvadratikus alakot hozzuk négyzetösszeg alakra, és állapítsuk meg a karakterét. (Négy pontot ér az, ha valaki megmondja, mi van a diagonális alak főátlójában, és megállapítja a jelleget. További két pont, ha megad egy olyan bázist is, amiben ez a kvadratikus alak négyzetösszeggé válik, vagyis a négyzetösszeg alakot az eredeti* x_1, x_2, x_3 *változókkal írja fel. Ez a kétpontos utolsó rész eléggé számolós, aki biztos a tudásában, inkább foglalkozzon helyette a későbbi feladatokkal, mert ugyanannyi idő alatt több pontot szerezhet.)*

2. *Legyen* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *és* $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, *ha* $n \geq 0$. *Írjuk fel a sorozathoz tartozó mátrixot, adjuk meg a diagonális alakját és a megfelelő bázistranszformáció mátrixát, végül számítsuk ki a mátrix hatványainak és a sorozat általános elemének az explicit képletét.*

3. *Mely* $\lambda \in \mathbb{R}$ *értékekre lesz* $\langle x+1, 2x^2+\lambda, x^3-\lambda, x-\lambda \rangle$ *háromdimenziós altere* $\mathbb{R}[x]$*-nek* $\mathbb{R}$ *fölött?*

4. *Adjunk meg egy olyan* $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4)$ *lineáris transzformációt, melyre* $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(A)^\perp \oplus \mathrm{Im}(A)$.

5. *Egy ötször ötös komplex mátrix minimálpolinomja* x^3. *Hány dimenziós lehet a sajátaltere? Minden lehetséges értékre adjunk példát.*

6. *Legyen* A *olyan lineáris transzformáció a* $\mathbb{C}^n$ *euklideszi téren, melyre* $A + A^*$ *minden sajátértéke pozitív. Következik-e ebből, hogy* $\det(A) \neq 0$*?*