Mat-alkmat szak, első évfolyam, második félév

Részletes vizsgatematika (2004 tavasza)

A vizsganapok: az utolsó héten csütörtök (július 8), a vizsgaidőszak összes többi hetén péntek. A pénteki vizsgákhoz a konzultáció csütörtök délután 2-kor lesz (ha az aznapi vizsga elhúzódik, akkor kicsit később). A vizsgák és a konzultációk is a szobámban lesznek (déli épület, III. emelet 202/A). Emailben lehet további konzultációkat kérni, vagy kérdéseket föltenni (`ewkiss@cs.elte.hu`).

A vizsgák negyed kilenckor kezdődnek a szobámban. Akkorra négy ember jöjjön, azután fél tíztől 15 percenként egyvalaki. **A vizsgázók sorrendjét az ETR-beli sorrend szabja meg.** Érdemes tehát reggel bejelentkezni még otthonról az ETR-be, megnézni, hogy hányan halasztottak, és ennek alapján kiszámolni, hogy hányra kell jönni vizsgázni aznap. Közmegegyezéssel csere lehetséges egy napon belül, erről nekem nem kell szólni, azonban mindig legyen vizsgázó készenlétben. Leckekönyv nélkül vizsgázni nem lehet.

Az anyag az, ami az előadáson (illetve részben a gyakorlaton) elhangzott. Ajánlott irodalom: Freud Róbert: *Lineáris algebra*, Kiss-Hermann: *Bevezetés az absztrakt algebrába* (`http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/algebrabook/index.html`). NB: a bizonyítást nem kell tudni; BJ: bizonyítás jövőre (általában csak a matematikusoknak); GY: a bizonyítást a gyakorlaton vettük. A római számok a gyakorlatok feladatsoraira utalnak.

Vektorterek. A vektortéraxiómák, elemi tulajdonságok, példák (I/13,14,15). Az altér fogalma, és jellemzése a műveletekre való zártság segítségével (I/16, 17). A generált altér, mint adott elemeket tartalmazó legszűkebb altér; generátorrendszer. A generált altér elemeinek jellemzése: lineáris kombináció. Lineáris függés és függetlenség, kapcsolatuk. Végtelen vektorrendszer függetlensége. A bázis fogalma, jellemzése, mint minimális generátorrendszer, illetve maximális független rendszer. Következmény: véges bázis létezése végesen generált vektortérben.

A függés tranzitivitása, a kicserélési tétel. Következmények: független rendszer elemszáma legfeljebb akkora lehet, mint egy generátorrendszeré, minden független rendszer kiegészíthető bázissá, a bázis elemszámának egyértelműsége (I/18). A dimenzió fogalma. Valódi altér dimenziója. Alterek összege, mint az unió által generált altér. Az összeg elemeinek előállítása mikor egyértelmű (II/4), direkt összeg, direkt kiegészítő altér létezése. Alterek összegének dimenziója (GY, II/3).

Lineáris leképezések. A lineáris leképezés, mint vektorterek közötti homomorfizmus; lineáris transzformáció. Műveletek lineáris leképezések között. Az algebra fogalma, a lineáris leképezések vektortere, a lineáris transzformációk algebrája.

Vektor koordinátái adott bázisban. Tetszőleges n-dimenziós vektortér izomorf T^n-nel. A lineáris leképezések előírhatósági tétele, lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban. Összefüggés a mátrixműveletek, és a lineáris leképezések műveletei között, ennek vektortér- és algebra-izomorfizmusként való megfogalmazása. A bázistranszformáció képlete.

Képtér, magtér, az injektivitás és a szürjektivitás jellemzése. A dimenziótétel. Véges dimenziós téren az invertálható transzformációk jellemzése (van bal- illetve jobbinverze, nem bal- illetve jobboldali nullosztó, magja nulla, képe az egész tér, bijektív, lásd II/16 is).

További három oldal!

Véges dimenziós téren, ha AB az identitás, akkor BA is az. Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. A $\mathrm{Hom}(V, W)$ dimenziója.

Előjeles mérték tetszőleges vektortéren, alaptulajdonságok. A mértékek vektortere egydimenziós. Lineáris transzformáció determinánsa: hányszorosára növeli a térfogatot. A determináns független a választott mértéktől. A determinánsok szorzástétele. Transzformáció determinánsa megegyezik a mátrixának a determinánsával. Egy transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem nulla. Az invertálható transzformációkra bizonyított jellemzés átvitele mátrixokra.

Vektorrendszer rangja, mint az általa generált altér dimenziója. A rang a maximális független részrendszerek elemszáma. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. A rang legfeljebb akkora, mint az értelmezési tartomány dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mint bármelyik tényező rangja (III/3,4). Mátrix oszloprangja, lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának a rangja. Az oszloprang és a sorrang megegyezik, determinánsrang, a rang a Gauss-eliminációnál keletkező vezéregyesek száma (bizonyítás csak vázlatosan). Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldás egyértelműségének jellemzése a rang segítségével.

A duális bázis és a duális tér, véges dimenzióban ez izomorf az eredeti térrel, de ez az izomorfizmus bázisfüggő. A duális tér duálisa véges dimenzióban bázisfüggetlen módon izomorf az eredeti térrel. A diád fogalma. Minden mátrix felbontható rangnyi számú diád összegére, de kevesebbre nem. Algoritmus a minimális diádfelbontás meghatározására.

Egy n-dimenziós vektortéren ható transzformáció, illetve n-szer n-es mátrix diagonalizálhatósága, sajátértékei, sajátvektorai, sajátalterei, karakterisztikus polinomja. Ennek gyökei a sajátértékek, így legfeljebb n sajátérték van (III/17). A sajátalterek összege direkt összeg, különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek (III/14). Következmény: ha n különböző sajátérték van, akkor a transzformáció diagonalizálható.

Egy A mátrix vagy transzformáció minimálpolinomja azon polinomokból álló ideál normált generátoreleme, melyeknek A gyöke. A minimálpolinom egyértelmű, ez a legalacsonyabb fokú polinom, aminek A gyöke, egy polinomnak A akkor és csak akkor gyöke, ha ez a polinom a minimálpolinomnak többszöröse. Ha V egy n-dimenziós vektortér, akkor $\mathrm{Hom}(V)$ elemeinek illetve az n-szer n-es mátrixoknak a minimálpolinomja legfeljebb n^2 fokú (de valójában legfeljebb n-edfokú a Cayley-Hamilton tétel miatt!). Bővebb test felett egy mátrix minimálpolinomja nem változik (IV/4).

A sajátértékek gyökei a minimálpolinomnak. A Cayley-Hamilton tétel: minden mátrix illetve transzformáció gyöke a karakterisztikus polinomjának (a bizonyítást csak négyesért vagy ötösért kell tudni). Következmények: a minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, és így a foka legfeljebb n; a minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek; ha n különböző sajátérték van, akkor a minimálpolinom a karakterisztikus polinom konstansszorosa.

Az invariáns altér fogalma. A minimálpolinom prímhatványok szorzatára való felbontásából a tér invariáns alterek direkt összegére való felbontása adódik. Az ezen alterekre vett megszorítások minimálpolinomjai az eredeti minimálpolinom megfelelő tényezői (IV/19). Következmény: a transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomja lineáris tényezőkre bomlik, és minden gyöke egyszeres. Egy transzformáció akkor és csak akkor nilpotens, ha mátrixa alkalmas bázisban szigorú felső háromszögmátrix. Következmény: ha a minimálpolinom lineáris tényezőkre bomlik, akkor a transzformáció mátrixa alkalmas bázisban felső háromszögmátrix. A Jordan-normálalak, egyértelműség (BJ). A Jordan-normálalak hatványozása.

Bilineáris leképezések. Bilineáris leképezés, ennek előírhatósága bázispáron. Bilineáris függvény mátrixa, szimmetrikus bilineáris függvény. A bázistranszformáció képlete. Valós feletti kvadratikus alak, minden kvadratikus alak egyértelműen kapható egy szimmetrikus bilineáris függvényből. Egy bilineáris függvény akkor és csak akkor diagonalizálható, ha szimmetrikus. Ortogonalitás, a Gram-Schmidt ortogonalizáció. Sylvester tehetetlenségi tétele (V/3). A kvadratikus alak karaktere, ennek kapcsolata a főminorokkal (NB, V/6).

Komplex bilineáris függvény, itt a kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a bilineáris függvényt. A kvadratikus alak akkor és csak akkor valós, ha a függvény Hermite-féle. Ortogonalizáció, tehetetlenségi tétel mint valósban.

Euklideszi terek. Valós és komplex euklideszi tér, ortonormált bázis, a skaláris szorzat képlete. Ortogonalizáció, ortogonális kiegészítő altér. Merőlegesség, hossz, szög, a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség (csak valósban bizonyítva, vö. VI/2), a háromszög-egyenlőtlenség. Vektor koordinátáinak, transzformáció mátrixának felírása ortonormált bázisban a skaláris szorzat segítségével. Az adjungált transzformáció, jellemzése skaláris szorzattal. Ha a W altér A-invariáns, akkor az ortogonális kiegészítő altere A^*-invariáns. Komplex felett egy transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható **ortonormált bázisban,** ha normális, azaz felcserélhető az adjungáltjával. Az A transzformáció akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A-nak (NB, VI/16).

Normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek, ezek egyben az adjungált transzformáció sajátalterei is, konjugált sajátértékekkel (VI/1,12). Komplex felett minden transzformáció alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix. Önadjungált, szimmetrikus, unitér és ortogonális transzformációk. Az A transzformáció akkor és csak akkor önadjungált (szimmetrikus), ha a hozzá tartozó bilineáris függvény Hermite-féle (szimmetrikus). Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha skalárszorzat-tartó, illetve ha távolságtartó, illetve ha ortonormált bázist ortonormált bázisba visz. Unitér (ortogonális) transzformáció sajátértékei egy abszolút értékűek, önadjungált (szimmetrikus) transzformáció sajátértékei valósak.

Egy valós feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha szimmetrikus (főtengelytétel), és pontosan akkor ortogonális, ha alkalmas ortonormált bázisban a mátrixa forgatásokat tartalmazó kétszer kettes, illetve $+1$-et vagy -1-et tartalmazó egyszer egyes diagonális blokkokra bomlik (vö. VI/22–26).

Ha a bázistranszformációt ortonormált bázisok között végezzük, akkor a mátrixa unitér (ortogonális). Következmények: egy mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható unitér transzformációval, ha normális; minden hermitikus/szimmetrikus bilineáris függvény alkalmas **ortonormált** bázisban diagonalizálható. A sajátértékek extremális tulajdonsága.

Csoportok. Gyűrű additív és multiplikatív csoportja, a lineáris csoportok és rendjeik. A szimmetrikus és az alternáló csoport, ciklusfelbontás.

Részcsoport, jellemzése zártsággal és komplexusszorzással. Lagrange tétele, mellékosztály, index, a baloldali és a jobboldali mellékosztályok száma megegyezik. Egy elemmel generált részcsoport, ciklikus csoport. Elem rendje osztója a csoport rendjének, következmény: Euler-Fermat tétel. Egy csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja, ha prímrendű. Prímrendű csoport ciklikus. Ciklikus csoport részcsoportja is ciklikus. Egy n rendű ciklikus csoportnak minden $d \mid n$ esetén egyetlen d rendű részcsoportja van, és benne a d rendű elemek száma $\varphi(d)$.

A generált részstruktúra (részcsoport, altér, részgyűrű, ideál, stb.) általános fogalma és létezése. A generált részcsoport elemeinek leírása az általános, illetve a kommutatív esetben. Az S_n-et generálja az (12) és $(12 \ldots n)$.

Permutációcsoport, fok, orbit, stabilizátor, összefüggésük, tranzitivitás. A kocka szimmetriáinak a száma. Csoport hatása halmazon. Cayley tétele.

Izomorfizmus, módszerek az izomorfia eldöntésére. Minden ciklikus csoport izomorf $\mathbb{Z}^+$ illetve $\mathbb{Z}_n^+$ valamelyikével. Ha p prím, akkor p rendű csoportból izomorfia erejéig csak egyféle van. A Klein-csoport, a diédercsoport, a kvaterniócsoport (GY). A négyelemű, hatelemű (NB) és nyolcelemű (NB) csoportok száma.

Homomorfizmus képe és magja, normálosztó. Faktorcsoport, természetes homomorfizmus, homomorfizmus-tétel. A faktorcsoport részcsoportjai és normálosztói, az izomorfizmus-tételek. Elem rendje a faktorcsoportban. Kettő indexű részcsoport normálosztó.

A konjugálás mint automorfizmus. Csoport hatása önmagán konjugálással, konjugált osztályok. Egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha konjugált osztályok egyesítése. Centralizátor, a konjugált osztály elemszáma a centralizátor indexe. Centrum, ez normálosztó. Osztályegyenlet.

Prímhatványrendű csoport centruma nemtriviális. Prímnégyzet rendű csoport kommutatív. Általánosítás: a centrum szerinti faktor nem lehet ciklikus.

A Sylow-tételek (BJ). Következmény: Cauchy tétele, véges p-hatványrendű csoport az, amiben minden elem p-hatványrendű, a p-csoport fogalma (p prím).

Feloldható csoportok, Jordan-Hölder tétele (BJ). Minden Abel-csoport, véges p-csoport, illetve páratlan rendű véges csoport feloldható (ez utóbbi állítás a Feit-Thompson-tétel, NB). Burnside tétele: ha egy véges csoport rendje csak két prímmel osztható, akkor a csoport feloldható (BJ). Egyszerű csoportok. A kommutatív, prímhatványrendű, illetve a páratlan rendű egyszerű csoportok pontosan a prímrendűek. A legalább ötödfokú alternáló csoport egyszerű (BJ). Következmény: a szimmetrikus csoport mikor feloldható. A $\mathrm{PSL}(n, T)$ csoport egyszerű, kivéve $\mathrm{PSL}(2,2)$, $\mathrm{PSL}(2,3)$ (NB). A véges egyszerű csoportok klasszifikációja (csak mese).

A direkt szorzat fogalma és belső jellemzése véges sok tényező esetén. Diszkrét direkt szorzat (direkt összeg). Elem rendje a direkt szorzatban, a direkt szorzat mikor ciklikus. A véges Abel-csoportok alaptétele (BJ), egyértelműség (BJ).

A szabad csoport fogalma és megadása (BJ). Definiáló relációk, Dyck tétele (BJ).

Gyűrűk. Az ideál fogalma, a generált ideál képlete kommutatív, egységelemes gyűrűben. A maximum-feltétel ekvivalens alakjai, kapcsolat a véges generáltsággal.

Euklideszi gyűrű, ebben minden ideál főideál. Egy egységelemes integritási tartomány akkor és csak akkor alaptételes, ha a főideálokra érvényes a maximum-feltétel, és minden irreducibilis elem prím. Következmény: főideálgyűrű, euklideszi gyűrű alaptételes.

Partíció és ekvivalencia-reláció, kapcsolatuk. A hányadostest konstrukciója. Nullosztómentes gyűrű elemeinek additív rendje, karakterisztika. Minden testnek van olyan bővítése, ahol már minden nem konstans polinomnak van gyöke (BJ).