

Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Kilencedik és további alkalmak (2004. április 30–∞)

1. Állapítsuk meg az alább felsorolt csoportok elemeinek centralizátorát, konjugált osztályait, normálosztóit és centrumát: D_4 , Q , D_3 , D_5 , S_4 , S_5 , A_4 , A_5 , $GL(2, 2)$.
2. Bizonyítsuk be azt az elmúlt félévben gyakorlaton már bizonyított állítást, hogy az S_n csoportban két elem akkor és csak akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”, azaz minden k -ra a két felbontásban ugyanannyi k hosszú ciklus van. Vezessük le ebből, hogy S_n -ben az $(12 \dots n)$ elem centralizátora a saját hatványaiból áll.
3. Legyen N kételemű normálosztó a G csoportban. Igazoljuk, hogy $N \leq Z(G)$.
4. Mutassuk meg, hogy ha egy G csoport azon elemei, melyeknek a négyzete az egység-elem, részcsoporthoz alkotnak, akkor ez egyben normálosztó is. Igaz-e mindig, hogy ez a részhalmaz részcsoporthoz?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus csoport, akkor G Abel.
6. Határozzuk meg a $GL(n, q)$ és a $PSL(n, q)$ rendjét.
7. Igazoljuk, hogy $GL(n, T)$ centruma az egységmátrix nem nulla skalárszorosaiból áll.
8. Legyen $p > 2$ prím. A $GL(3, p)$ csoportban tekintsük azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csupa 0, a főátlójában pedig csupa 1 áll. Igazoljuk, hogy egy p^3 elemszámú G részcsoporthoz kaptunk, mely nem kommutatív, és minden egységtől különböző eleme p rendű. Határozzuk meg ennek a csoportnak a centrumát.
9. Mutassuk meg, hogy ha P véges p -csoport valamilyen p prímre, és N nemtriviális normálosztó P -ben, akkor $|N \cap Z(P)| > 1$.
- 10*. Mutassuk meg, hogy ha P véges p -csoport valamilyen p prímre, akkor minden p indexű részcsoporthoz normálosztó.
- 11*. Mutassuk meg n szerinti indukcióval, hogy A_n egyszerű, ha $n \geq 5$.
- 12*. Milyen n -ekre van S_n -ben Q -val izomorf részcsoporthoz?
13. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_4^+$ csoport összes negyedrendű elemét.
14. Legyenek G és H véges csoportok. Mutassuk meg, hogy a $(g, h) \in G \times H$ rendje a $|g|$ és a $|h|$ legkisebb közös többszöröse. Vezessük le ebből, hogy $G \times H$ akkor és csak akkor ciklikus, ha G is, H is az, és $(|G|, |H|) = 1$. Mi a helyzet, ha G és H nem feltétlenül véges?
15. Döntsük el, hogy az alábbi csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoporthoz direkt szorzatára, és igenlő válasz esetén adjunk is meg egy-egy ilyen felbontást: \mathbb{Z}_6^+ , \mathbb{Z}_8^+ , \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{C}^+ , \mathbb{Z}_{15}^\times , \mathbb{Z}_{16}^\times , D_3 , D_4 , D_6 , Q , A_4 , S_5 .
16. Hányféleképpen bontható direkt szorzatra $\mathbb{Z}_5^+ \times \mathbb{Z}_5^+$?
17. A véges Abel-csoportok alaptételének felhasználásával döntsük el, hogy izomorfia erejéig hány 6, 8, 16, 32, 48 rendű Abel-csoport van.

FORDÍTS!

18. Igazoljuk, hogy ha G és H csoportok, akkor $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.
19. Álljon G az S_8 azon elemeiből, melyek az $\{1, 2, 3, 4\}$ részhalmazt önmagába képzik. Mutassuk meg, hogy ez részcsoporthoz, de nem normálosztó S_8 -ban. Igaz-e, hogy $G \cong S_4 \times S_4$?
20. Adjuk meg az $S_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ csoport egy kompozícióláncát, és kompozíciófaktorait.
21. Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit, és döntsük el, izomorfak-e valamelyik „ismert” csoporttal.
- $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.
 - $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.
 - $\langle a \mid a^5 = 1, a^7 = 1 \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^5 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^5 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$.
 - $\langle t, f \mid t^2 = 1, f^n = 1, tft = f^{-1} \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1, bab^{-1} = a^3 \rangle$.
 - $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = b \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^4 = 1 \rangle$.
 - $\langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1, ba = ab^3 \rangle$.
 - $\langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, ac = ca, bc = cb, ab = ba^3 \rangle$.
22. Legyen G tizedrendű nemkommutatív csoport. Bizonyítsuk be a következő állításokat, majd általánosítsunk arra az esetre, ha G rendje egy prím kétszerese.
- G -ben nincs tizedrendű elem.
 - Ötödrendű elem nem lehet felcserélhető másodrendű elemmel.
 - G -ben nem lehet minden elem másodrendű (vö. VII/7).
 - G -ben van másodrendű elem (vö. VII/13).
 - G -ben van ötödrendű elem.
 - Minden ötödrendű elem centralizátora ötelemű.
 - Minden másodrendű elem centralizátora kételemű.
 - G -ben öt darab másodrendű elem van, és ezek mind konjugáltak.
 - G -ben négy darab ötödrendű elem van.
 - Ha $|f| = 5$ és $|t| = 2$, akkor $tft^{-1} = f^{-1}$.
 - $G \cong D_5$.
23. Legyen N normálosztó a G csoportban. Rendeljük hozzá G/N tetszőleges K részcsoporthoz a K elemeinek uniójából képzett L halmazt. Igazoljuk, hogy L részcsoporthoz G -ben, melynek indexe G -ben ugyanaz, mint K indexe G/N -ben, és ez a megfeleltetés bijekció G/N összes részcsoporthoz, és a G csoport N -et tartalmazó részcsoporthoz között, melynél G/N normálosztói éppen a G csoport N -et tartalmazó normálosztóinak felelnek meg. Igazoljuk azt is, hogy $K \cong L/N$, és ha K normálosztó, akkor $(G/N)/K \cong G/L$.