Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Hetedik alkalom (2004. április 14–19)

1. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}_m^+$ *illetve* $\mathbb{Z}_m^\times$ *csoportok elemeinek a rendjeit, ahol* $m = 7,\ 8,\ 12$.

2. *Határozzuk meg a* g *elem rendjét a* G *csoportban, ha* (g, G) *rendre* $(-1, \mathbb{R}^+)$, $(-1, \mathbb{R}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{19}^\times)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^+)$, $(17, \mathbb{Z}_{32}^\times)$, $(x+1, \mathbb{Z}_{11}[x]^+)$, $(5, \mathbb{Z}_{11}[x]^\times)$.

3. *Legyenek* a, n, m *pozitív egészek, és* $d = (a^n - 1, a^m - 1)$. *Mutassuk meg, hogy* $o_d(a) \mid n$, *és hogy* $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

4. *Legyen* G *csoport és* $g \in G$. *Igazoljuk az alábbiakat.*
a) *Ha* G *elemszáma véges, és legalább 2, akkor* G*-ben van prímrendű elem.*
b) g *akkor és csak akkor hatványa* g^k*-nak, ha* $(o(g), k) = 1$.

5. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét, és előjelét. Tegyük meg ugyanezt a 'hátulról előre' permutációval is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

6. *Adjuk meg az alábbi permutációk ciklusfelbontását, rendjét és előjelét.*

$$(1234)(35)(1432)(35) = ? \qquad (12345)^{-1}(234)(12345) = ? \qquad [(12)(23)(34)]^{1999} = ?$$

7. *Bizonyítsuk be az* $(x_1 x_2 \ldots x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \ldots (x_1 x_3)(x_1 x_2)$ *összefüggést. Igazoljuk, hogy* S_n *minden eleme előáll legfeljebb* $n-1$ *darab transzpozíció szorzataként. Van-e olyan elem, amihez legalább* $n-1$ *transzpozíció kell? [Használjuk fel, hogy egy* n *pontú összefüggő gráfnak legalább* $n-1$ *éle van.]*

8. *Bizonyítsuk be, hogy az* S_n *csoport minden eleme felírható egy olyan soktényezős szorzat alakjában, melynek minden tényezője* (12) *vagy* $(12\ldots n)$.

9*. *Egy négy egység oldalú négyzetben 15 egységnégyzet helyezkedik el, ezekre rendre az* $1-15$ *számok vannak írva. A tizenhatodik négyzet helye üres. A kis négyzetek mozgathatók vízszintesen és függőlegesen: az üres négyzet helyére bármelyik szomszédja betolható. A játék célja az, hogy egy véletlenszerűen összekevert állapotból visszaállítsuk az alapsorrendet, azaz azt, amelyben a számok sorfolytonosan, emelkedő sorrendben követik egymást, és az üres négyzet a legalsó sor jobb oldalán van. Bizonyítsuk be, hogy ez a visszaállítás nem lehetséges abból a helyzetből kiindulva, amely az alapsorrendtől csak abban tér el, hogy a 14-es és 15-ös számú négyzetet megcseréljük (az üres négyzet helye is ugyanaz).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy minden páros permutáció előáll hármasciklusok szorzataként.*

11. *Mutassuk meg, hogy egy permutáció akkor és csak akkor hatványa egy ciklusnak, ha ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusokat nem írjuk ki).*

12. *Hány másodrendű elem van* S_5*-ben?*

13. *Adjuk meg az összes* $f \in S_n$ *permutációt, melyre* $f \circ (1, 2, \ldots, n) = (1, 2, \ldots, n) \circ f$.

14. *Bizonyítsuk be, hogy $f, g \in S_n$ esetén akkor és csak akkor létezik olyan $h \in S_n$, melyre $f = h^{-1}gh$, ha f diszjunkt ciklusokra való felbontásakor ugyanannyi, ugyanakkora hosszúságú ciklus keletkezik, mint amikor g-t bontjuk fel.*

15. *Határozzuk meg Lagrange tételének felhasználásával az S_3 csoport összes részcsoportját, valamint az A_4 alternáló csoport összes negyedrendű részcsoportját. Írjuk fel S_3-ban az $\{id, (12)\}$ részcsoporthoz tartozó összes bal- és jobboldali mellékosztályt. Keressük meg $\mathbb{Z}_{12}^+$ és $\mathbb{Z}_{12}^\times$ összes részcsoportját.*

16. *Legyen $n\mathbb{Z}^+$ az n-nel osztható egész számok csoportja az összeadásra. Határozzuk meg $|\mathbb{Z}^+ : n\mathbb{Z}^+|$ értékét.*

17. *Határozzuk meg a G csoportban az X által generált részcsoportot:*
a) $G = \mathbb{Z}^+$, $X = \{28, 34\}$.
b) $G = S_4$, $X = \{(123), (12)(34)\}$.
c) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \{2, 3\}$.
d) $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, X *a 2 determinánsú mátrixok halmaza.*
e) $G = S_n$, $X = \{(12), (12 \dots n)\}$.

18. *Legyen f a D_n diédercsoportban egy $2\pi/n$ szögű forgatás, t pedig tetszőleges tengelyes tükrözés. Mutassuk meg, hogy D_n minden eleme egyértelműen felírható f^i vagy tf^i alakban, ahol $0 \leq i < n$. Igazoljuk azt is, hogy $f^i t = tf^{-i}$ minden i egészre.*

19. *Határozzuk meg a D_5 és D_6 diédercsoportokban a $\langle t, f^2 \rangle$ részcsoportot.*

20. *Mutassuk meg, hogy ha A és B részcsoportok egy G csoportban, akkor AB akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$.*

21. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport minden elemének a négyzete az egységelem, akkor G Abel. Igaz-e az állítás négyzet helyett negyedik hatványra?*

22. *Ciklikus-e a három-hatványadik komplex egységgyökök multiplikatív csoportja?*

23. *Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok additív csoportja nem végesen generált, sőt, minimális generátorrendszere sincs.*

24. *Mutassuk meg, hogy két véges indexű részcsoport metszete is véges indexű. Mennyi lehet a metszet indexe legfeljebb?*

25. *Igazoljuk, hogy ha $o(g)$ és $o(h)$ relatív prímek, és $gh = hg$, akkor $o(gh) = o(g)o(h)$. Elhagyható-e a két feltétel valamelyike?*

26. *Igazoljuk, hogy $|G|$ pontosan akkor páros, ha G-ben van másodrendű elem.*

27. *Legyen G csoport, H részcsoportja G-nek és $g \in G$. Mutassuk meg, hogy a $g^{-1}Hg$ komplexusszorzat is részcsoport, melynek rendje ugyanaz, mint H rendje. Igaz-e, hogy a Hg jobboldali mellékosztály G egy alkalmas részcsoportja szerinti baloldali mellékosztály is egyben?*

28*. *Bizonyítsuk be, hogy végesen generált csoportnak minden véges indexű részcsoportja végesen generált.*