Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Hatodik alkalom (2002. március 22–26)

$B = A^*$ akkor és csak akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$. Az A^* mátrixa – ortonormált bázisban – az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése a következő:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció akkor és csak akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy komplex feletti transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ortonormált bázisban), ha normális. Egy valós feletti transzformáció akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ortonormált bázisban), ha szimmetrikus (ez a főtengelytétel). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

1. *Bizonyítsuk be, hogy páronként ortogonális alterek összege mindig direkt összeg.*

2. *Legyen B komplex pozitív szemidefinit bilineáris függvény. Igazoljuk az alábbiakat.*
a) $B(u,u)B(\lambda u+v, \lambda u+v) + B(u,v)B(v,u) = B(u, \lambda u+v)B(\lambda u+v, u) + B(u,u)B(v,v)$.
b) $|B(u,v)|^2 \le B(u,u)B(v,v)$ *(CBS egyenlőtlenség). Mikor áll egyenlőség?*

3. *Álljon a $W \le \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1,2,3,4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.*

4. *Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis egy euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $c_1, \ldots, c_n$ bázis létezik, melyre $\langle b_i, c_j\rangle = \delta_{ij}$.*

5*. *Egy n-dimenziós valós euklideszi térben maximálisan hány olyan nemnulla vektor adható meg, melyek közül bármely kettő szöge α, ha $\alpha = 60°$, illetve ha $\alpha = 120°$?*

6. *Igazoljuk, hogy $A^2 = 0 \implies Av \perp A^*v$. Igaz-e a megfordítás $\mathbb{C}$ illetve $\mathbb{R}$ felett?*

7. *Igazoljuk, hogy ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.*

8. *Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Im}A)^\perp$ és $\mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^\perp$.*

9. *Bizonyítsuk be, hogy $AA^* = 0 \implies A = 0$.*

10*. *Bizonyítsuk be, hogy $AB^* = BA^* = 0 \implies \mathrm{Im}(A+B) = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}B$.*

11. *Legyen* $M = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Diagonalizáljuk M-et alkalmas bázisban.
b) Adjuk meg M összes lehetséges felső háromszögmátrix alakját $\mathbb{C}$ tetszőleges ortonormált bázisában. Diagonalizálható-e M unitér transzformációval?

Fordíts!

12. *Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?*

13. *Legyenek A és B normális transzformációk. Igaz-e, hogy ha felcserélhetők, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?*

14. *Mutassuk meg, hogy az A transzformáció pontosan akkor normális, ha minden v vektorra $\|Av\| = \|A^*v\|$.*

15. *Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A és A^* sajátvektorai ugyanazok.*

16. *Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A-nak.*

17. *Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB akkor és csak akkor önadjungált, ha $AB = BA$.*

18*. *Igazoljuk, hogy minden komplex feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként.*

19. *Igazoljuk, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek egymással felcserélhetők.*

20. *Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.*

21. *A sík forgatásai, tükrözései, nyírásai közül melyek ortogonálisak illetve szimmetrikusak? A bázis a szokásos. Változik-e az eredmény ha egy másik ortonormált bázist veszünk?*

22. *Igazoljuk, hogy egy szimmetrikus illetve ortogonális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek.*

23. *Bizonyítsuk be, hogy ha A ortogonális és szimmetrikus, akkor A^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?*

24. *Legyen A egy valós euklideszi téren értelmezett lineáris transzformáció. Mutassuk meg, hogy A^* akkor és csak akkor polinomja A-nak, ha $AA^* = A^*A$.*

25. *Legyen A egy valós euklideszi téren értelmezett lineáris transzformáció. Mutassuk meg, hogy ha A^* polinomja A-nak, akkor a tér felbomlik páronként ortogonális, legfeljebb kétdimenziós A-invariáns alterek direkt összegére.*

26. *Határozzuk meg a valós síkon az összes olyan A transzformációt, melyre A^* polinomja A-nak. Melyek lesznek ezek közül ortogonálisak, illetve szimmetrikusak?*

27. *Transzformáljuk négyzetösszeggé* **ortonormált bázisban** *a V/1. feladatban megadott $-x^2 + 10xy - y^2 - z^2$ és $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakokat.*

28. *Legyen A egy pozitív definit, B pedig egy tetszőleges bilineáris függvény egy véges dimenziós $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas bázisban A is és B is egyszerre négyzetösszeggé válik. Szükséges-e feltenni, hogy A (vagy B) pozitív definit?*

29. *Igazoljuk, hogy a pozitív szemidefinit kvadratikus alakokhoz tartozó önadjungált lineáris transzformációk halmazában, a négyzetgyökvonás egyértelműen elvégezhető.*