

Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Negyedik alkalom (2002. márc. 8–12)

1. Határozzuk meg a III/9.-beli mátrixok minimálpolinomját. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyeknek másodfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző? Adjunk meg a síkon olyan lineáris transzformációt, melynek minimálpolinomja x^2 .
2. Határozzuk meg egy általános diagonális mátrix minimálpolinomját.
3. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.
4. Igazoljuk, hogy egy racionális elemű négyzetes mátrix minimálpolinomja ugyanaz \mathbb{Q} és \mathbb{C} felett. (Használjunk fel egy korábban a gyakorlaton szerepelt állítást homogén racionális együtthatós egyenletrendszerek komplex megoldásairól).
5. Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M -nek.
6. Tekintsük $\text{Hom}(V)$ -ben az $\{A^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ ($A^0 = I$) transzformációk által generált alteret. Hány dimenziós ez az altér?
7. Igaz-e, hogy tetszőleges legfeljebb n -edfokú $m(x)$ polinomhoz van az n -dimenziós vektortérnek egy olyan lineáris transzformációja, amelynek $m(x)$ a minimálpolinomja? Mely polinomok állnak elő egy alkalmas lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként?
8. Adjuk meg az alábbi mátrixok Jordan-alakját.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha M komplex elemű mátrix, akkor $n \rightarrow \infty$ esetén M^n akkor és csak akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.
10. Legyen T test, $\lambda \in T$, és M az az $n \times n$ -es Jordan-blokk, melynek főátlójában λ , alatta, vele párhuzamosan csupa 1-es, a mátrix többi helyén pedig mindenütt nulla áll. Igazoljuk, hogy ha $f \in T[x]$, akkor az $f(M)$ mátrix elemei a következők: a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k -edik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a (k) kitevő k -edik deriváltat jelöl ($0 \leq k \leq n - 1$).
11. Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van, ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő, különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.
12. Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?
13. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\text{Im}(A)$ és $\text{Ker}(A)$ is B -invariáns altér.

FORDÍTS!

14. Van-e olyan $M \in \mathbb{Q}^{100 \times 100}$ mátrix, melynek csak a két triviális invariáns altere van?
15. Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n -dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A -nak pontosan 2^n invariáns altere van. Igazoljuk azt is, hogy ha B felcserélhető A -val, akkor van olyan f polinom, hogy $B = f(A)$.
16. Legyen A lineáris transzformáció egy komplex feletti n -dimenziós vektortéren.
- Igazoljuk, hogy ha $k \leq n$, akkor A -nak van k -dimenziós invariáns altere.
 - Mik lesznek A hatványainak sajátértékei? Mit mondhatunk ezek multiplicitásairól?
17. Legyen W altere a V vektortérnek, $\mathbb{A} = \text{Hom}(V)$ mint algebra, és álljon \mathbb{B} az \mathbb{A} azon elemeiből, melyeknek W invariáns altere. Mutassuk meg, hogy \mathbb{B} részalgebrája \mathbb{A} -nak, és határozzuk meg a dimenzióját.
18. Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $A \in \text{Hom}(V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \text{Im}(A^k) \oplus \text{Ker}(A^k)$.
19. Legyen $A \in \text{Hom}(V)$ és $g \in T[x]$, továbbá $W = \text{Im}(g(A))$ és $U = \text{Ker}(g(A))$. Igazoljuk, hogy az A transzformáció W -re illetve U -ra vett megszorításának minimálpolinomja $m_A/(m_A, g)$ illetve (m_A, g) . Vessük össze ezt az állítást az elem hatványának rendjéről szóló képlettel.
20. Legyen $\dim V < \infty$ és $A \in \text{Hom}(V)$. Igaz-e, hogy A pontosan akkor nilpotens,
- ha nem létezik olyan $W \leq V$ nem nulla altér, hogy $A(W) = W$?
 - ha tetszőleges $W \leq V$ nem nulla altérre $\dim A(W) < \dim W$?
- 21*. Legyen A egy $n \times n$ -es nilpotens mátrix. Igazoljuk, hogy $A^n = 0$.
- 22*. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?
23. Egy R gyűrű egy I részhalmazát ideálnak nevezzük, ha részcsoporth, és minden $s \in I$ és $r \in R$ esetén $rs, sr \in I$. Mutassuk meg, hogy ha T test, akkor $T[x]$ minden I ideáljához van olyan m polinom, hogy I pontosan az m többszöröseiből áll.
24. A Gauss-egészek az $a+bi$ alakú komplex számok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozzuk meg ebben a gyűrűben a legszűkebb olyan ideált, ami az $5 + 5i$ és a $7i - 1$ számokat is tartalmazza. Igaz-e, hogy ez az ideál egy alkalmas komplex szám összes többszöröseiből áll?
25. Legyen V véges dimenziós, $A \in \text{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Igazoljuk a következőket:
- Azok a p polinomok, melyekre $p(A)v = 0$, ideált alkotnak $T[x]$ -ben. Jelölje $m_{A,v}$ ennek a normált generátorelemét.
 - m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V -t.
 - $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v -t tartalmazó legszűkebb A -invariáns altér.
 - $\dim(W) = \text{gr}(m_{A,v})$.
 - Ha m_A -nak van k -adfokú irreducibilis osztója, akkor A -nak van k -dimenziós invariáns altere.
 - Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektortérén.