

Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Harmadik alkalom (2004. márc. 1–5)

Vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója, ami tetszőleges maximális független részrendszer elemszáma. Lineáris leképezés rangja a képterének dimenziója. Szorzat rangja legfeljebb akkora, mind bármelyik tényező rangja. Lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint a mátrixának az oszloprangja. Mátrix oszloprangja ugyanaz, mint a sorrangja, és ez a Gauss-eliminációban fellépő vezéregyenes száma.

1. Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, valamint rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az $\{x^2 + 2x + 2, 2x^2 - 3x + 6, 3x^2 - 8x + 10\}$ polinomrendszer rangját.

3. Igazoljuk, hogy ha A és B összeadható lineáris leképezések, akkor $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$. Adjunk példát arra az esetre, amikor egyenlőség áll, és arra is, amikor nem.

4. Legyenek $A \in \text{Hom}(V, W)$ és $B \in \text{Hom}(U, V)$. Igazoljuk, hogy

- $\text{Im}(AB) \subseteq \text{Im}(A)$ és $\text{Ker}(AB) \supseteq \text{Ker}(B)$;
- ha AB injektív (illetve szürjektív), akkor B (illetve A) is az;
- ha A és B is injektív (szürjektív, bijektív), akkor AB is az;
- $r(AB) = r(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B)) \geq r(A) + r(B) - \dim(V)$.

5. Legyenek V, W ugyanazon test feletti vektorterek, és $v \in V$ egy rögzített vektor. Jelölje \mathcal{X} azt a lineáris leképezést $\text{Hom}(V, W)$ -ből W -be, ami az A leképezéshez $A(v)$ -t rendel. Határozzuk meg \mathcal{X} rangját.

6. Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 8 rangú, 13×21 -es valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangja hét lesz, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak bejárni az algebra előadásra?

A sárkány a királylány nyolcéves hugát is meglátogatta. „Neked egy 8 rangú 8×8 -as mátrixot kell most rögtön felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát a most felírt mátrixot már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” Ez a lány már korábban megtanulta a lineáris algebrát. Életben maradt-e?

7. Ha egy $n \times n$ -es M mátrix rangja r , mi lesz annak a mátrixnak a rangja, amelynek elemei az M megfelelő $((n-1) \times (n-1))$ -es előjeles aldeterminánsai?

8*. Mely r egészekhez van olyan $k \times n$ -es valós mátrix, amelynek rangja r , és egyik $r \times r$ -es aldeterminánsa sem nulla?

FORDÍTS!

9. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-alakját.

a) Az alábbi mátrixok \mathbb{R} illetve \mathbb{C} felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix n -edik hatványát.

b) A vektortér a sík \mathbb{R} felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

10. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P -re tükröz.

11. Egy város lakásait három kategóriába sorolják állapotuk szerint: elhanyagolt, átlagos, és kitűnő. A jelenlegi finanszírozási lehetőségek mellett az éves statisztikák azt mutatják, hogy az elhanyagolt lakások 60 százaléka elhanyagolt marad az év végére is, 30 százaléukat felújítják átlagos állapotúra, a maradék 10 százalékot pedig kitűnő állapotúra. Az átlagos állapotú lakások 20 százaléka leromlik elhanyagoltra, 70 százaléka marad átlagos állapotú, a maradék 10 százalékot pedig felújítják. Végül a kitűnő állapotú lakások 80 százaléka kitűnő állapotban marad, a maradék 20 százalék pedig leromlik átlagosra az év végére. Hosszú távon mi lesz a lakások állapotának eloszlása? [Eredmény: 2 : 4 : 3, százalékban közelítőleg 22.2 : 44.4 : 33.3, ez már 4-5 év alatt beáll, és nem függ a kiinduló eloszlástól.]

12. Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

a) $a_0 = a_1 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ (Fibonacci-sorozat).

b) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

13. Adjunk explicit képletet az a_k és b_k számokra, amelyek rekurzív definíciója a következő: $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ ($k \geq 0$).

14. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós, akkor λ legalább k -szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Teljesül-e mindig az egyenlőség? Igaz-e, hogy a diagonalizálhatóság azzal ekvivalens, hogy a sajátaltér összege az egész tér?

15. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha λ sajátértéke A -nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2 -nek.

b) Ha λ^2 sajátértéke A^2 -nek, akkor λ sajátértéke A -nak.

c) Ha 0 sajátértéke A^2 -nek, akkor 0 sajátértéke A -nak.

16. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ -es M mátrix főátlójában és ezalatt csupa nulla áll. Igazoljuk, hogy $M^n = 0$.

17. Igazoljuk, hogy minden transzformációnak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, mint (tetszőleges bázisban felírt) mátrixának, és hogy egy $n \times n$ -es M mátrix karakterisztikus polinomja n -edfokú polinom. Milyen kapcsolatban állnak az M karakterisztikus polinomjának együtthatói M nyomával illetve determinánsával? Mutassuk meg, hogy ha M -nek n különböző sajátértéke van, akkor ezek összege az M nyoma, szorzatuk az M determinánsa.