Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Második alkalom (2004. feb. 23–27)

Bizonyos vektorterekben egy-egy bázist a „szokásos” bázisnak nevezzük. Ezek a következők. A T test feletti T^n vektortérben azon $e_1, \ldots, e_n$ vektorok, melyekre e_i-nek az i-edik komponense 1, a többi komponens nulla. A $T^{k\times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyekben egyetlen komponens 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük). A $T[x]$ legfeljebb n-edfokú elemeiből álló vektortérben az $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ bázis. A síkon, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren az $(1,0)$, $(0,1)$ pontok. A $\mathbb{C}$-ben, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben az 1 és az i. Egy T testben, mint önmaga feletti vektortérben az egységelem.

Egy A lineáris transzformáció *nilpotens,* ha van olyan n pozitív egész, hogy $A^n = 0$ (a nulla transzformáció), és A *idempotens,* ha $A^2 = A$.

1. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.*

a) *A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.*
b) *A legfeljebb n-edfokú T feletti polinomok a T test felett.*
c) *A $T^{2\times 3}$ a T test felett.*
d) *A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?*
e) *Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek 2 gyöke.*
f) *Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.*
g) *A $T^{n\times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a T test felett.*

2. *A $\mathbb{Z}_2^3$ vektortérben hány direkt kiegészítő altere van egy egydimenziós altérnek?*

3. *Legyen V véges dimenziós vektortér, és U, W alterek V-ben. Bizonyítsuk be, hogy* $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

4. *Legyenek $V_1, \ldots, V_n$ alterei a V vektortérnek. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek.*

(1) *A $V_1 + \cdots + V_n$ összeg direkt összeg (vagyis minden eleme* **egyértelműen** *áll elő $v_1 + \cdots + v_n$ alakban, ahol $v_i \in V_i$).*
(2) *Mindegyik V_i csak a nullvektorban metszi a többi V_j összegét.*
(3) *Bárhogyan is veszünk ki nem nulla $v_i \in V_i$ vektorokat, $v_1, \ldots, v_n$ lineárisan független.*

5. *Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.*

6. *Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$ esetén minden $\mathbb{R}$ feletti n-dimenziós vektortérnek végtelen sok $n-1$-dimenziós altere van.*

7. *Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban, határozzuk meg a kép- és magterét, és ellenőrizzük a dimenziótétel állítását.*

a) *V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítés esetében számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,2)$, $b_2 = (-1,1)$ bázisban.*
b) *$V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.*

Fordíts!

c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* A *az* $1+i$ *számmal való szorzás.*
d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(v)$ *a* v *komponenseinek az összege.*
e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* A *a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).*
f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ *legfeljebb harmadfokú elemei,* $V_2 = \mathbb{C}$ *az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(f) = f(i)$.
g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ *legfeljebb* n*-edfokú elemei az* $\mathbb{R}$ *felett,* $A(f) = f'$ *(derivált).*

8. *Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban* M*, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?*

9. *Az* A *transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az* A *mátrixát az* $(1,1)$, $(1,2)$ *bázisban.*

10. *Legyen* W *a* V *véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy* V*-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek* W *a magtere, illetve a képtere.*

11. *Legyen* V *véges dimenziós vektortér,* $A : V \to V$ *pedig egy lineáris transzformáció. Ha* $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$*, következik-e ebből, hogy* $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$*? Igaz-e a megfordítás?*

12. *Mutassuk meg, hogy ha* A *idempotens lineáris transzformáció a* V *vektortéren, akkor* $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = V$. *Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.*

13. *Igazoljuk, hogy ha az* A *és* B *nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz* $AB = BA$*), akkor* $A + B$ *is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?*

14. *Legyen* V *egy* n*-dimenziós vektortér és* $v, w \in V$. *Alteret alkotnak-e* $\mathrm{Hom}(V)$*-ben az alábbi halmazok? Ha igen, hány dimenziós ez az altér?*
a) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) = w\}$;
b) $\{A \in \mathrm{Hom}(V) \mid A(v) \in \langle w \rangle\}$.
Határozzuk meg $\mathrm{Hom}(V)$*-ben az izomorfizmusok által generált alteret.*

15. *Adjunk meg olyan* A *és* B *lineáris transzformációkat egy alkalmas* V *vektortéren, melyekre* $AB = I$ *(az identitás), de* BA *nem az.*

16. *Legyenek* V_1 *és* V_2 *véges dimenziós vektorterek, és* $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. *Igazoljuk:*
a) Ha A *szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.*
b) Ha A *valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.*
c) Ha A *injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.*
d) Ha A *egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.*
e) Van olyan B *lineáris leképezés, hogy* $ABA = A$ *és* $BAB = B$*, és itt ha* A *szürjektív, akkor* B *jobbinverze, ha pedig* A *injektív, akkor* B *balinverze* A*-nak.*
f) $(AX = AY \implies X = Y) \iff A$ *injektív* $\iff A$ *balinvertálható.*
g) $(XA = YA \implies X = Y) \iff A$ *szürjektív* $\iff A$ *jobbinvertálható.*

17. *Algebrát alkotnak-e* $\mathbb{R}$ *felett az* $\mathbb{R}$*-en értelmezett, valós értékű, folytonos függvények a szokásos, pontonkénti műveletekre? És akkor, ha a szorzást a kompozícióval helyettesítjük?*

További gyakorlásul a Freud-könyv negyedik és ötödik fejezetének feladatait javaslom, leginkább ezeket: 4.2.7, 4.2.12, 5.1.15, 5.3.4, 5.4.3, 5.6.19, 5.7.7, 5.7.8, 5.8.3, 5.8.7.