Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam második félév

Első alkalom (2004. február 16–20)

1. *Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek? Mennyi a rangjuk?*

a) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi mátrixok oszlopvektorai.*

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben* $\{1,x,x^2\}$, $\{x,2x,x^2,x^3\}$, $\{1+x,1+2x,1+3x\}$, $\{1+x,1+x^2,x+x^2\}$.

c) *Az $\mathbb{R}$ feletti $\mathbb{C}$ vektortérben tetszőleges három komplex szám.*

2. *Igazoljuk az alábbiakat.*

a) *Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.*

b) $\{v\}$ *akkor és csak akkor független, ha* $v \neq 0$.

c) *Ha* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *független, akkor* $\{v_1+v_2,v_2,v_3\}$ *is független.*

d) *Páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.*

3. *Tegyük fel, hogy egy vektortér* a,b,c,d *vektoraira* $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$ *mindegyike összefüggő, de* $\{a,b,c\}$ *független. Határozzuk meg* d*-t.*

4. *Legyenek* $v_1,\dots,v_n$ *vektorok egy* V *vektortérben. Ha a* v_i+v_j $(1\le i<j\le n)$ *vektorok rendszere lineárisan független, mennyi lehet* n*?*

5*. *Meg lehet-e adni* $\mathbb{R}^n$*-ben végtelen sok vektort úgy, hogy közülük bármely* n *lineárisan független legyen?*

---

6. *Altér-e a* W *halmaz a* V *vektortérben az alábbi esetekben?*

a) $V=T[x]$ *a* T *test felett,* W *a páros fokú polinomok, és a zéruspolinom.*

b) $V=T[x]$ *a* T *test felett,* W *a legfeljebb tizedfokú polinomok, és a zéruspolinom.*

c) V *a komplex számok vektortere* $\mathbb{R}$ *illetve* $\mathbb{C}$ *felett, és* $W=\{z\mid \mathrm{Re}(z)=0\}$.

d) V *a sík* $\mathbb{R}$ *felett,* W *pedig az első és harmadik síknegyed uniója.*

7. *Igaz-e* $\mathbb{R}$ *felett, hogy* $x\in\langle x^2-1,x^2-2,3x+2\rangle$*? És* $\langle x,x^2+2,x+2\rangle=\langle 1,x+1,x^2+1\rangle$*?*

8. *Legyen* V *a sík (helyvektorai), mint* $\mathbb{R}$ *feletti vektortér.*

a) *Milyen alakzatot alkothat egy 1 illetve 2 elemmel generált altér?*

b) *Igazoljuk, hogy minden altér generálható két elemmel, és adjuk meg az összes alteret.*

c) *Hány altere van a* $\mathbb{Z}_2$ *test feletti* $\mathbb{Z}_2^2$ *és* $\mathbb{Z}_2^3$ *vektortereknek? És a* $\mathbb{Z}_7$ *feletti* $\mathbb{Z}_7^2$*-nek?*

9. *Legyen* V *vektortér a* T *test felett.*

a) *Mi az üres halmaz által generált altér?*

b) *Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.*

c) *Mikor lesz két altér uniója is altér?*

d) *Mutassuk meg, hogy ha* U, V, W *alterek egy vektortérben és* $U\supseteq V$*, akkor fennáll az úgynevezett moduláris összefüggés:* $U\cap(W+V)=(U\cap W)+V$.

Fordíts!

10. *Mutassuk meg, hogy ha egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen T testek felett igaz még ez az állítás?*

11. *Legyen W altere az $\mathbb{R}$ feletti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Tegyük fel, hogy $2u+6v \in W$ és $3u + v \in W$. Következik-e ebből, hogy $u, v \in W$?*

12. *Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?*

---

13. *Igazoljuk tetszőleges T test feletti V vektortérben az alábbi állításokat.*
 a) $(\forall\lambda \in T)(\forall v \in V)(\lambda v = 0_V \iff (\lambda = 0_T \vee v = 0_V))$.
 b) $(\forall v \in V)((-1_T)v = -v)$.

14. *Legyen $V = \{a, b\}$, definiáljuk az „összeadást” úgy, hogy $a + a = a + b = b + a = a$, és $b + b = b$. Definiáljuk továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $v \in V$ esetén λv-t v-nek. Mely vektortéraxiómák teljesülnek? Igaz-e, hogy $(-1)v$ ellentettje v-nek minden $v \in V$-re? A $(-1)v = -v$ összefüggés bizonyításában hol használtuk ki, hogy V-ben létezik ellentett?*

15. *Igazoljuk, hogy az összeadás kommutativitása következik a többi vektortéraxiómából.*

16. *Adjunk példát olyan V vektortérre, és W részhalmazra, mely az összeadásra zárt, de az ellentett képzésére nem. Mutassuk meg, hogy egy vektortér egy részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha nem üres, és zárt a vektortérműveletekre.*

17. *Az alábbiakban négy bizonyítást adunk arra, hogy egy altér nulleleme megegyezik a vektortér nullelemével, ezek közül azonban csak az egyik helyes. Melyik a helyes, és mi a hiba a többiben? (Altéren itt olyan W részhalmazt értünk, ami maga is vektortér V összeadására és skalárral való szorzására nézve. A V nullelemét 0_V, a W-ét 0_W jelöli.)*
 a) Mivel $0_V + v = v$ minden $v \in V$-re, tehát W elemeire is teljesül, ezért 0_V definíció szerint W-nek is nulleleme. A W-beli nullelem egyértelműsége alapján így $0_W = 0_V$.
 b) Ha $0_W \neq 0_V$ lenne, akkor V-ben két nullelem lenne, ami ellentmond a V-beli nullelem egyértelműségének.
 c) Legyen $v \in W$ tetszőleges. Ekkor $0_V + v = v$ és $0_W + v = v$ egyaránt fennáll, tehát $0_V + v = 0_W + v$. Itt mindkét oldalhoz a v vektor W-beli [a negyedik bizonyításban: V-beli] ellentettjét hozzáadva a kívánt $0_V = 0_W$ egyenlőséget kapjuk.

---

18. *Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n-dimenziós V vektortérben?*
 a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
 b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
 c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
 d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 f) Ha F elemszáma n, és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
 g) Ha G elemszáma n, és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
 h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
 i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.

19*. *A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?*