Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi (2004. dec. 14) — megoldásvázlatok

1. A karakterisztikus mátrix normálalakjában a főátló elemei 1, 1, x, $x(x^2-1)$ (4 pont), a Jordan-alak diagonális, a főátlóban két 0, egy 1 és egy -1 szerepel (2 pont).

2. Nyilván $(5 \otimes 2) + (2 \otimes 5) = 1 \otimes 20$ (2 pont). Tanultuk, hogy $1 \otimes n \leftrightarrow n$ izomorfizmus $\mathbb{Z}^+ \otimes \mathbb{Z}^+$ és $\mathbb{Z}^+$ között. Mivel $3 \otimes 4 = 1 \otimes 12$, azt kell megvizsgálni, hogy mi a $20 + \langle 12 \rangle$ rendje a $\mathbb{Z}^+/\langle 12 \rangle$ faktorcsoportban. Az $1 + \langle 12 \rangle$ rendje nyilván 12, és így a hatvány rendjének képlete miatt az eredmény $12/(20, 12) = 3$.

3. Az osztályok: $\{1, 3\}$, $\{2, 4, 6, 12\}$, $\{8, 24\}$, $\{16, 48\}$ (4 pont), a faktor a négyelemű lánc.

4. $x^2 - 1$. Ugyanis $Mv = w$ az M első oszlopa, és $Mw = v$, tehát $(M^2 - I)v = 0$ (4 pont). De $x^2 - 1$ egyik osztója sem megfelelő. *Második megoldás:* Az M minimálpolinomja az első feladat miatt $x(x^2 - 1)$, ennek f osztóira kell végignézni, hogy $f(M)v = 0$ igaz-e.

5. Nem, mert általában nem tranzitív. Például D_4 normálosztóhálójában az 1 kongruens a centrummal, és a centrum kongruens D_4-gyel, de 1 nem kongruens D_4-gyel, mert D_4 nem Abel.

6. Igaz. Ugyanis $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}^+)$ osztható csoport, mert ha $\varphi : A \mapsto \mathbb{Q}^+$ egy homomorfizmus, akkor (a pontonként kiszámított) φ/n is az. De tudjuk, hogy osztható csoportnak és torziócsoportnak nulla a tenzorszorzata.

7. Igaz. A jegyzetben szerepel (7.6.12. Feladat), hogy akkor és csak akkor van véges sok invariáns altér, ha a modulus ciklikus. Ilyenkor az invariáns alterek hálója izomorf a minimálpolinom osztóhálójával, ami disztributív. Megfordítva, ha az invariáns alterek hálója disztributív, akkor minden sajátaltér egy dimenziós (különben lenne M_3-mal izomorf részháló). Így a 7.6.12. Feladat megoldása szerint haladva látjuk, hogy minden prímhatvány rendű ciklikus direkt összeadandóból csak egy lehet.