Alk. mat. gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi (2004. dec. 14) — megoldásvázlatok

1. A karakterisztikus mátrix normálalakjában a főátló elemei $1, 1, x, x^3$ (4 pont), a Jordan-alakban egy 1×1-es, és egy 3×3-as, nullához tartozó blokk szerepel.

2. Nyilván $1 \otimes 12 = 12(1 \otimes 1) = 0 \otimes 1 = 0$ (2 pont). Továbbá $2 \otimes 3 = 1 \otimes 6 = 6 \otimes 1$-nek az első komponens miatt a kétszerese, a második komponens miatt a háromszorosa nulla. Ezért ez az elem is nulla. Így a keresett rend az 1.

3. Az osztályok: $\{1\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 9\}$, $\{6, 12, 18, 36\}$ (4 pont), a faktor az a négyelemű háló, amelyben van két összehasonlíthatatlan elem (a kételemű háló direkt négyzete).

4. $x^2 + 1$. Ha a v vektort kétszer 90 fokkal elforgatjuk, akkor az ellentettjébe megy, vagyis $(A^2 + I)v = 0$ (4 pont). Így a rend az $x^2 + 1$-nek osztója, de 1 nem lehet.

5. Nem. Ha $a \neq b$ másodrendű elemek egy Abel-csoportban, akkor $a + b$ is, és e három elem által generált ciklikus részcsoportokra nem igaz a disztributivitás (egy M_3-at adnak). Márpedig $\mathbb{Z}^{\times}_{2^{2004}}$-ben nemcsak a -1 másodrendű, hanem a $2^{2003} \pm 1$ is.

6. Igen, mert $\varphi(a \otimes q) = 2004\varphi\big(a \otimes (q/2004)\big) = 0$.