Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első zárthelyi (2004. okt. 26) — megoldásvázlatok

1. Mivel $(\sqrt{3}+ri)(\sqrt{3}-ri)=3+r^2$ nem nulla és $\mathbb{Q}$-beli, ezért a $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+ri)$ bővítésnek eleme $\sqrt{3}-ri$, és így $\sqrt{3}$ valamint ri is. Ezek negyedfokú bővítést generálnak, kivéve ha $r=0$. Ezért $\sqrt{3}+ri$ negyedfokú ha $r\neq 0$, és másodfokú, ha $r=0$.

2. Az inverzet $a+bz+cz^2+dz^3+I$ alakban keresve a lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a megoldást: $1+z^2+z^3+I$ (4 pont, ügyesebb számolás is lehetséges, ha $z^4+z^3+1\equiv 0$-t z^4-nel és z-vel is elosztjuk). A minimálpolinom x^4+x^3+1, ami közvetlen behelyettesítéssel látszik, vagy onnan, hogy $z^3+1\equiv z^4$, és mivel $z+I$ gyöke x^4+x^3+1-nek, a két négyzetre emeléssel kapott z^4+I is (2 pont).

3. Igen, mert $\mathbb{Q}$-t a relatív prím fokú $\sqrt[3]{3}$-mal és $\sqrt[4]{2}$-vel bővítve 12-edfokú, az i-vel tovább bővítve 24-edfokú bővítést kapunk (hiszen i nem valós). Ezért $\sqrt[4]{2}$ foka K fölött 4.

4. Az α biztosan gyöke az $(x^2-1)^2-3$ polinomnak, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis (1 pont). Az α konjugáltjai ennek a polinomnak a gyökei, vagyis a $\pm\alpha$ és $\pm\beta$, ahol $\beta=\sqrt{1-\sqrt{3}}$ (1 pont). A felbontási test tehát az ezek által generált L bővítés. Az α-val való bővítés negyedfokú, a β-val való efölött másodfokú, hiszen egy négyzetgyökkel bővítünk, de β nem valós. Ezért $|L:\mathbb{Q}|=8$ (2 pont). Az x^4-2 példájához hasonlóan láthatjuk, hogy a Galois-csoport most is D_4. Ebben egyetlen kételemű normálosztó van, amelynek az identitástól különböző eleme a fenti négy konjugált elem mindegyikét az ellentettjébe viszi. A fixpontok halmazát $\alpha^2=1+\sqrt{3}$ és $\alpha\beta=i\sqrt{2}$ generálja (2 pont). Természetesen nem kell a Galois-csoportra hivatkozni a helyes megoldáshoz, a $\mathbb{Q}(i\sqrt{2},\sqrt{3})$ testet elegendő megtalálni „kézzel is” (de azt be kell látni, hogy $i\sqrt{2}\in L$).

5. Tekintsük a $K=\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n))$ test fölött az $i\sin(2\pi/n)$ számot. Ennek négyzete K-ban van, és ezért első, vagy másodfokú bővítést generál. Beláttuk előadáson, hogy $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n), i\sin(2\pi/n))=\mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n))$, és ennek foka $\varphi(n)$. Ez a test nem valós, ha $n>2$, a K viszont igen. Ezért a bővítés másodfokú, és így a szorzástétel miatt $\cos(2\pi/n)$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\varphi(n)/2$, ha $n>1$. Speciálisan $n=360$ esetén 48 az eredmény.

6. Mivel x^2-2 gyökei $\mathbb{Z}_7$-ben 3 és 4, ezekkel nem is kell bővíteni (1 pont). Az x^5-1 felbontási testében e polinomnak öt különböző gyöke van, mert deriváltja $5x^4$, és ennek csak a nulla gyöke 7 karakterisztikában, tehát nincs többszörös gyök (1 pont). Ezek a gyökök egy ötödrendű részcsoportot alkotnak. Ha tehát a keresett testnek az elemszáma 7^n, akkor $5\mid 7^n-1$, vagyis 7 rendje mod 5 osztója n-nek. Ez a rend 4, vagyis a felbontási test legalább $GF(7^4)$ (3 pont). Ebben van ötelemű részcsoport Cauchy tétele miatt, és így itt x^5-1 is gyöktényezőkre bomlik (1 pont).