**Alk. mat. gyakorlat, második évfolyam, első félév**

*Első zárthelyi (2004. okt. 26) — megoldásvázlatok*

**1.** Nincs, hiszen láttuk gyakorlaton, hogy $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})(i) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ nyolcadfokú, $\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})$ pedig negyedfokú bővítése $\mathbb{Q}$-nak (utóbbi azért, mert $i\sqrt[4]{2}$ minimálpolinomja $x^4-2$ a $\mathbb{Q}$ fölött).

**2.** Az inverzet $a+bz+cz^2+dz^3+I$ alakban keresve a lineáris egyenletrendszer megoldásával megkapjuk az inverzet: $1+z+z^2+z^3+I$ (4 pont). A minimálpolinom $x^4+x^3+x^2+x+1$, ami közvetlen behelyettesítéssel látszik (2 pont).

**3.** Nyilván $K(\sqrt{3}+\sqrt[5]{2}) = K(\sqrt{3})$, hiszen $\sqrt[5]{2} \in K$ (2 pont). Mivel $\sqrt[3]{2}$ és $\sqrt[5]{2}$ foka relatív prím, a $K$ tizenötödfokú bővítése $\mathbb{Q}$-nak (2 pont). A $\sqrt{3}$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 2, ami 15-höz relatív prím, így másodfokú bővítést generál $K$ fölött is (2 pont).

**4.** Nyilván $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \varepsilon)$, ahol $\varepsilon$ primitív harmadik egységgyök, ez hatodfokú bővítés, hiszen $\varepsilon$ nem valós, és másodfokú (2 pont). Ezért a Galois-csoport is hatelemű (1 pont). Mivel $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ valós és harmadfokú, ezek az elemek fixen maradnak. Az ehhez a testhez tartozó részcsoport kételemű (2 pont). Tehát legfeljebb két ilyen automorfizmus lehet. De kettő van is: az identitás, és a komplex konjugálás (1 pont). (Az utolsó mondat helyett azt is elég belátni, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{R} \cap L$, ami azért igaz, mert ennél nagyobb résztest a fokszámok miatt már csak az egész van, de az nem valós).

**5.** Nem. Mivel $14,4 = 360/25$, ez azt jelenti, hogy egy szabályos 25-szög van adva. A 10 fokos szöghöz viszont szabályos 36-szöget kell szerkeszteni. Algebrailag ez azt jelenti, hogy $\eta$ fokát keressük $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ fölött, ahol $\varepsilon$ primitív 25-ödik, az $\eta$ pedig primitív 36-odik egységgyök. A $\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\varepsilon)$ foka $\varphi(25) = 20$. A $\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\varepsilon, \eta)$ bővítés foka osztható $\varphi(36)$-tal, ezért 3-mal is. Így a szorzástétel miatt $\mathbb{Q}(\varepsilon) \le \mathbb{Q}(\varepsilon)(\eta)$ foka is osztható 3-mal, vagyis nem lehet 2-hatvány.

**6.** Ha $f$ ilyen, akkor $\mathbb{Z}_2[x]/(f)$ egy $2^{10}$ elemű test, amely normális bővítése $\mathbb{Q}$-nak, és így $f$ gyöktényezőkre bomlik benne. Minden véges test tökéletes, ezért nincs többszörös gyök, azaz $f$-nek itt tíz gyöke van. A $2^{10}$ elemű testek mind izomorfak, ezért a keresett válasz a tizedfokú elemek számának tizedrésze. Tudjuk, hogy $\mathrm{GF}(2^{10})$ résztestei a 10 osztóinak felelnek meg. Ezek elemszáma összesen $2^5+2^2-2^1 = 34$. Ezért a keresett szám $(2^{10}-34)/10 = 99$.