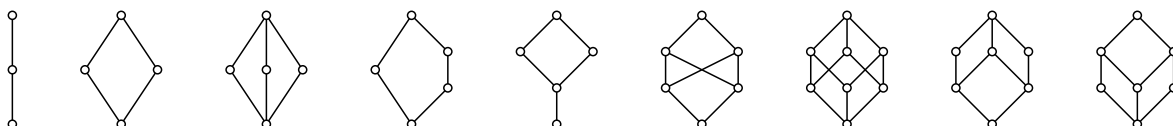


## Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

*Kilencedik alkalom (2004. november 29–30)*

1. Hány kétváltozós művelet van egy négyelemű halmazon?
2. Írjuk fel az alábbi kétváltozós műveletek szorzástábláit, és osztályozzuk a megfelelő struktúrákat aszerint, hogy izomorfak-e: az  $\{1, i, -1, -i\}$  számok a szorzásra;  $\mathbb{Z}_4^+$ ;  $\mathbb{Z}_8^\times$ ;  $\mathbb{Z}_5^\times$ ; a  $\{0, 2, 4, 6\}$  halmaz a modulo 8 összeadásra illetve szorzásra; a  $\{0, 4, 8, 12\}$  halmaz a modulo 16 összeadásra illetve szorzásra; a  $\{3, 9, 27, 81\}$  halmaz a modulo 81 szorzásra; egy kételemű halmaz összes önmagába menő leképezése a kompozícióra; egy négyelemű halmaz összes önmagába menő **konstans** leképezése a kompozícióra; egy téglalap illetve rombusz összes szimmetriája a kompozícióra; egy kételemű halmaz összes részhalmaza az unióra, a metszetre, illetve a szimmetrikus differenciára; a  $\mathbb{Z}_2$  feletti összes polinomfüggvények a szorzásra; az  $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$  halmaz az  $(a, b) * (c, d) = (a, d)$  műveletre; a  $\{0, 1, 2, 3\}$  halmaz a min illetve max műveletekre (összesen 20 struktúra).
3. Az előző feladatban szereplő struktúráknak számítsuk ki az összes részstruktúráit, és az összes kongruenciáit (nem kell az összes struktúráét kiszámolni, csak annyit, amennyi elég ahhoz, hogy a dolog flottul menjen). Melyek bonthatók fel nemtriviális módon direkt szorzatra, és melyek generálhatók egy elemmel? Keressünk olyan négyelemű félcsoportokat, amelyek a felsoroltak egyikével sem izomorfak. Van-e négyelemű egyszerű félcsoport?
4. Döntsük el az alábbi részben rendezett halmazokról, hogy hálók-e, és ha igen, akkor disztributívak illetve modulárisak-e. Határozzuk meg ezeknek a hálóknak a kongruenciáit és részhálóit, és rajzoljuk le a kongruenciahálójukat és a részháló-hálójukat. Melyek lesznek komplementumosak, egyszerűek, illetve szubdirekt irreducibilisek? Keressük meg a metszet- illetve egyesítés-irreducibilis elemeket. Adjuk meg a második hálónak az elsőbe menő rendezéstartó leképezéseit, és válogassuk ki ezek közül a háló-homomorfizmusokat. Mindegyik lerajzolt hálóban keressünk minimális elemszámú generátorrendszert.



Igazoljuk, hogy egy  $\equiv$  ekvivalencia-reláció pontosan akkor háló-kongruencia, ha minden  $c$ -re  $a \equiv b$ -ből  $a \vee c \equiv b \vee c$  és  $a \wedge c \equiv b \wedge c$  következik.

5. Vezessük le mindkét disztributív szabályból a másikat, és ezekből a moduláris szabályt.
6. Mutassuk meg, hogy egy háló-kongruencia minden osztálya konvex részháló.
7. Mutassuk meg, hogy egy csoport normálosztóhálója mindig moduláris, de nem feltétlenül disztributív, a részcsoporthálója pedig nem is biztos, hogy moduláris.
- 8\*. Van-e olyan kétváltozós művelet egy négyelemű halmazon, hogy a kapott struktúrának csak egy részalgebrája és két kongruenciája legyen (a triviálisak)?
- 9\*. Írjuk le az egyszerű, kommutatív félcsoportokat.
- 10\*. Igazoljuk, hogy ha egy nullelemes véges félcsoportban minden elem alkalmas hatványa nulla, akkor minden elég hosszú szorzat nulla.