Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Nyolcadik alkalom (2004. november 22–23)

Egy főideálgyűrű feletti M mátrix k-adik *determinánsosztójának* nevezzük az összes $k \times k$-as részmátrix determinánsainak legnagyobb közös osztóját, ennek jele $\Delta_k(M)$; $\Delta_0(M) = 1$. A k-adik *elemi osztó* $\Delta_k(M)/\Delta_{k-1}(M)$, illetve nulla, ha $\Delta_{k-1}(M) = 0$.

1. *Hogyan olvashatók le a determinánsosztók és az elemi osztók a mátrix normálalakjából? Mutassuk meg, hogy elemi átalakítások során a determinánsosztók (asszociáltság erejéig) nem változnak, és ezért a normálalak egyértelmű.*

2. *Az alábbiakban megadjuk egy-egy komplex elemű (ismeretlen) karakterisztikus mátrix determinánsosztóit (összesen 6 mátrixét). Döntsük el, van-e ilyen mátrix, és ha igen, akkor adjuk meg a minimálpolinomját és a Jordan-féle normálalakját.* $\{1, 1, x^2\}$, $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, x, x^3\}$, $\{1, 1, x^2, x^3\}$, $\{1, 1, 1, x^3\}$, $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, x, x^2(x-1)^2, x^5(x-1)^4\}$.

3. *Határozzuk meg az $A \otimes B$ Abel-csoportokat, ha (A, B) rendre $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$; $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ (mint $\mathbb{Z}$-modulusok).*

4. *Legyen V a sík, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér. Írjuk fel $V \otimes V$ alábbi elemeit a lehető legrövidebb alakban (azaz minél kevesebb tenzor összegeként).*

a) $(1, 0) \otimes (2, 4) + (2, 0) \otimes (2, 4) + (3, 0) \otimes (1, 2)$.

b) $(1, 0) \otimes (1, 0) + (1, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0) + (0, 1) \otimes (0, 1)$.

c) $(1, 0) \otimes (2, 2) + (1, 2) \otimes (2, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0)$.

5. *Igaz-e:*

a) Osztható csoportnak bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata osztható.

b) Torziócsoport bármely Abel-csoporttal vett tenzorszorzata torziócsoport.

c) Osztható csoportnak bármely torziócsoporttal vett tenzorszorzata nulla.

d) Két szabad Abel-csoport tenzorszorzata is szabad.

e) Ha A tetszőleges Abel-csoport, akkor $\mathbb{Z}_n^+ \otimes A \cong A/nA$.

6. *Számítsuk ki $A = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}_m^+, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Q}^+$ esetén $\mathrm{Hom}(A, \varphi)$-t, $\mathrm{Hom}(\varphi, A)$-t és $A \otimes \varphi$-t. Vizsgáljuk meg, hogyan függ össze φ és az eredmény injektivitása, illetve szürjektivitása.*

a) $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *az a homomorfizmus, ami minden elemhez az n-szeresét rendeli.*

b) $\varphi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{nm}$, *az n-nel szorzás.*

c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ *a* mod n *vett maradék képzése.*

d) φ *a* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *beágyazás.*

7. *Legyen A Abel-csoport, és R az A endomorfizmusainak gyűrűje a pontonkénti összeadásra és a kompozícióra. Mutassuk meg, hogy a $\varphi \circ a = \varphi(a)$ az A-t baloldali R-modulussá teszi. Igazoljuk azt is, hogy az A akkor és csak akkor tehető hű modulussá egy S gyűrű fölött, ha S izomorf az R egy részgyűrűjével.*

8. *Igazoljuk, hogy ha T test, akkor a $T^{n \times n}$ balideáljai és T^n alterei között mindkét alábbi megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Melyik rendezéstartó, melyik rendezésfordító?*

a) Egy altérhez azoknak a mátrixoknak a halmaza tartozik, amelyek minden sora az adott altérnek eleme. Mi történik, ha sor helyett oszlopot veszünk?

b) Egy altérhez azoknak a mátrixoknak a halmaza tartozik, amelyek az altér minden elemét balról nullába szorozzák. Mi történik, ha jobbról szorzunk?