Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hetedik alkalom (2004. november 15–16)

Ha M egy R-modulus, és $X \subseteq M$, akkor $\operatorname{ann}(X) = \{r \in R \mid rX \subseteq \{0\}\}$ az X *annullátora*. Az M modulus *hű*, ha $\operatorname{ann}(M) = \{0\}$. Az $\{m\}$ annullátorát (és ha R főideálgyűrű, akkor ennek az ideálnak a generátorelemét is) az $m \in M$ elem *rendjének* nevezzük, jele $o(m)$.

1. *Modulusok, illetve unitér modulusok-e az alábbi struktúrák? Határozzuk meg a részmodulusokat, és a rendeket is, valamint, hogy mikor hű a kapott modulus.*

a) *Egy A Abel-csoport $\mathbb{Z}$ felett, ahol $n \circ a = na$ jelentése a szokásos.*

b) *Ha T test, akkor T^n a $T^{n\times n}$ felett a mátrix-vektor szorzásra.*

c) *Ha V vektortér a T test felett, és $A \in \operatorname{Hom}(V)$, akkor V a $T[x]$ felett a $p \circ v = p(A)v$ szorzásra. Milyen A esetén ciklikus ez a modulus, ha a V kétdimenziós?*

2. *Mutassuk meg, hogy $\operatorname{ann}(X)$ balideál, és ha X részmodulus, akkor kétoldali ideál. Vezessük le ebből, hogy balideál baloldali annullátora kétoldali ideál.*

3. *Tegyük $\mathbb{R}$ additív csoportját modulussá $\mathbb{R}[x]$ felett kétféleképpen. Az első modulus szorzása $p(x) \circ r = p(1)r$, a másodiké $p(x) \circ r = p(2)r$. Izomorf modulusokat kaptunk-e?*

4. *Általánosítsuk a hatvány rendjének képletét főideálgyűrű feletti modulusokra.*

5. *Igaz-e főideálgyűrű fölött, hogy ciklikus modulus része is ciklikus? Két ciklikus modulus direkt szorzata mikor lesz ciklikus?*

6. *Bázist alkot-e a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ csoportban $\{(1,2),(1,1)\}$?*

7. *Legyen $M = \mathbb{R}^3$ a $pv = p(A)v$ definícióval $\mathbb{R}[x]$-modulus, ahol*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{és} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Igazoljuk, hogy u generálja M-et (azaz M ciklikus).*

b) *Adjunk meg egy „szép” bijekciót M részmodulusai és $x(x-1)^2$ osztói között.*

8. *Az alábbi M modulusok X generátorrendszeréhez készítsük el az alaptételbeli mátrixot, hozzuk ezt normálalakra, és bontsuk fel M-et ciklikus modulusok direkt összegére.*

a) *$M = \mathbb{Z}_6^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{2, 3\}$.*

b) *$M = \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_2^+ \times \mathbb{Z}_3^+$ a $\mathbb{Z}$ felett, $X = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.*

c) *$M = \mathbb{C}^n$ mint a $\mathbb{C}[x]$ feletti, az alább megadott mátrixokhoz tartozó szokásos modulus, X pedig $\mathbb{C}^n$ szokásos bázisa.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

9. *Adjuk meg az alábbi mátrixokhoz tartozó karakterisztikus mátrix normálalakját, és ennek alapján számítsuk ki minimálpolinomjukat és Jordan-alakjukat.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$