Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Hatodik alkalom (2004. november 8–9)

Ha A Abel-csoport és $n \in \mathbb{Z}$, akkor $nA = \{na \mid a \in A\}$. Az A *torziócsoport,* ha minden eleme véges rendű; *torziómentes,* ha csak a 0 véges rendű; *szabad,* ha $\mathbb{Z}^+$ néhány példányának direkt összegével izomorf; *osztható*, ha az $nA = A$ minden $0 \neq n \in \mathbb{Z}$-re. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jelöli a komplex p-hatványadik egységgyökök csoportját a szorzásra (p prím).

1. *Legyen* $\alpha = a + bi + cj + dk$ *kvaternió* $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, *és* $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ *az* α *konjugáltja. Számítsuk ki az* α^2 *és az* $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ *szorzatokat.*

2. *Határozzuk meg az* $i + j + k$ *kvaternió inverzét, az* $i + j$ *kvaternió minimálpolinomját, majd adjuk meg az* $x^2 - 1$ *és az* $x^2 + 1$ *polinomok összes gyökeit a kvaterniótestben.*

3. *Mutassuk meg, hogy a Frobenius-tétel feltételei mind szükségesek, sőt adjunk meg olyan példákat, amelyek azt mutatják, hogy*

a) $\mathbb{R}$ *felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami nem test;*

b) $\mathbb{R}$ *felett van olyan végtelen dimenziós, nullosztómentes algebra, ami test, de nem a tételben felsorolt algebrák valamelyike;*

c) $\mathbb{R}$ *felett van véges dimenziós, nem nullosztómentes algebra (ami tehát nem test);*

d) *alkalmas test felett van akárhány, de véges dimenziós nullosztómentes algebra.*

4. *Legyen* R *szokásos gyűrű. Mutassuk meg, hogy egy* $P \subseteq R$ *halmaz akkor és csak akkor pozitivitástartomány az* R *egy alkalmas részben rendezésére nézve, ha zárt az összeadásra, a szorzásra, és nem tartalmazza* R *nullelemét. Igazoljuk, hogy a* P*-hez tartozó részben rendezés pontosan akkor elrendezés, ha minden* $r \neq 0$ *esetén* r *vagy* $-r$ *eleme* P*-nek.*

5. *Adjuk meg a* $\mathbb{Z}$, *a* $\mathbb{Q}$ *és az* $\mathbb{R}$ *gyűrűk összes elrendezéseit.*

6. *Legyen* R *részben rendezett szokásos gyűrű, és* T *a hányadosteste. Mutassuk meg, hogy* T*-nek egyetlen olyan rendezése van, amely* R *rendezésének kiterjesztése, és ennek a pozitivitástartománya* $P = \{a/b \in T \ : \ a, b > 0\}$. *Mutassuk meg azt is, hogy ha* R *rendezése elrendezés, akkor* T *rendezése is az.*

7. *Legyen* R *egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az* $R^{n\times n}$ *teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az* $I^{n\times n}$ *gyűrűk, ahol* I *ideálja* R*-nek. Speciálisan ferdetest feletti teljes mátrixgyűrű egyszerű gyűrű.*

8. *Számítsuk ki a* $\mathrm{Hom}(A, B)$, $\mathrm{Hom}(B, A)$, *Abel-csoportokat, ha* (A, B) *rendre* $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}^+)$; $(\mathbb{Z}_n^+, \mathbb{Z}_m^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_n^+)$; $(\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^+)$; $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_n^+)$.

9. *Igazoljuk, hogy ha* R *gyűrű, akkor az* $(r, n)(s, m) = (rs + rm + sn, nm)$ *szorzásra nézve az* $R^+ \times \mathbb{Z}^+$ *csoport egységelemes gyűrű, mely tartalmaz* R*-rel izomorf részgyűrűt.*

10. *Bizonyítsuk be, hogy a lineáris függésre, függetlenségre és dimenzióra vonatkozó elemi tételek érvényben maradnak ferdetest fölött is.*

11. *Legyen* D *ferdetest. Mutassuk meg, hogy a* $D^{n\times n}$ *centruma a* dE *skalármátrixokból áll, ahol* $d \in Z(D)$ *és* E *az egységmátrix.*

12*. *Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben* $1 - ab$ *invertálható, akkor* $1 - ba$ *is.*

13*. *Legyen* R *egységelemes gyűrű, és* I *minimális ideálja* R*-nek. Bizonyítsuk be, hogy* I *egyszerű gyűrű, vagy zérógyűrű.*