Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév
Ötödik alkalom — megoldásvázlatok (2004 ősz)

4. A koordinátarendszert minden esetben úgy vesszük fel, hogy a megadott egységszakasz két végpontja a $(0,0)$ és az $(1,0)$ pont legyen. a) Az alaptest a $0,1$ számok által generált részteste $\mathbb{C}$-nek, vagyis $K=\mathbb{Q}$. Ekkor $K(\alpha)$ ötödfokú K felett, így α nem szerkeszthető. A felbontási testet tehát nem is kell vizsgálni (ez egyébként $\mathbb{Q}(\varepsilon, \sqrt[5]{2})$, ahol ε primitív ötödik egységgyök, és huszadfokú $\mathbb{Q}$ felett). b) Az alaptest $\mathbb{Q}$, a felbontási test $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$, nyolcadfokú $\mathbb{Q}$ felett. Mivel ez 2-hatvány, α szerkeszthető. Ez egyébként közvetlenül is látszik, hiszen csak kétszer kell négyzetgyököt szerkeszteni. c) Az alaptest $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Efölött $\sqrt[6]{2}$ másodfokú, és $K(\alpha)$ a felbontási test is, hiszen α minimálpolinomja K felett $x^2-\sqrt[3]{2}$, és ennek a másik gyöke, azaz $-\alpha$ is benne van $K(\alpha)$-ban. (Általában is könnyű belátni a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggésből, hogy minden másodfokú bővítés normális). Tehát α szerkeszthető. d) Itt is $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, efölött α ötödfokú. Ezt a szokásos módon láthatjuk be annak kihasználásával, hogy $(3,5)=1$. Tehát α nem szerkeszthető. e) Az alaptest a $\mathbb{Q}(\pi)$, efölött a szerkesztendő $\sqrt{\pi}$ másodfokú, azaz szerkeszthető. f) Legyen $\alpha=\eta$ primitív 18-adik egységgyök. Ekkor a hatvány rendjére vonatkozó képlet miatt $\varepsilon=\eta^2$ primitív kilencedik egységgyök. Az előadáson tanultak miatt $K=\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Tehát η fokát akarjuk tudni K felett, ami nyilván legfeljebb kettő, és így a feladat szerkeszthető. *Vegyük észre,* hogy valójában η foka 1, azaz $\eta\in\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Ez például abból látszik, hogy $\varphi(18)=\varphi(9)=6$, de közvetlenül is igazolható, hiszen $-\eta$ könnyen láthatóan primitív kilencedik egységgyök. Ennek megfelelően a szerkesztéshez elegendő a szabályos 9-szöget a középpontjára tükrözni.

5. Ahhoz, hogy a tételeinket alkalmazni tudjuk, a koordinátarendszert csak úgy szabad felvenni, hogy $(0,0)$ és $(1,0)$ adott, vagy szerkeszthető legyen.

6. Jelölje (a szokásos módon) az oldalakat a,b,c, a hozzájuk tartozó szögfelezőket f_a,f_b,f_c, a szemköztes szögeket α,β,γ. Geometriából ismeretes, hogy $f_a=(2bc\cos(\alpha/2))/(b+c)$. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a megadott adatok értéke $a=1$, $b=1$, $f_a=1$, belátjuk, hogy már ez sem szerkeszthető. A $\cos(\alpha/2)=\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$ azonosságot felhasználva kifejezhetjük $\cos\alpha$-t az oldalak segítségével. Mivel a háromszög egyenlő szárú, $\cos\alpha=c/2a$. Behelyettesítve és négyzetre emelve átrendezéssel $c^3+c^2-2c-1=0$ adódik. Ez a harmadfokú polinom (a Racionális Gyökteszt miatt) irreducibilis, így c harmadfokú, tehát nem szerkeszthető. *Második megoldás*ként, szintén $a=b=f_a=1$-et feltételezve könnyen kiszámolhatjuk, a háromszög szögeit, az egyik $360°/7$ lesz, ami nem szerkeszthető, hiszen a szabályos hétszög sem szerkeszthető.

7. Legyen a háromszög szára a, alapja $2x$, a beírt kör sugara ρ. A területet kétféleképpen felírva azt kapjuk, hogy $\rho(a+x)=x\sqrt{a^2-x^2}$. Innen $\sqrt{a+x}$-el egyszerűsítve $x^3-ax^2+\rho^2x+a\rho^2=0$ adódik. Ez például $a=5$, $\rho=1$ esetén irreducibilis, tehát a szerkesztés már ebben a speciális esetben sem végezhető el.

8. A (3)-beli polinomot az eredeti negyedfokú polinom harmadfokú rezolvensének nevezzük. Ennek segítségével kaphatunk gyökképletet a negyedfokú egyenletre (lásd Fuchs: Bevezetés az algebrába, VIII/13). Ha a harmadfokú rezolvensnek van racionális gyöke, akkor a negyedfokú egyenlet megoldását végigkövetve látjuk, hogy a gyökök négyzetgyökökkel kifejezhetők, ezért szerkeszthetők. Ha az egyenletnek az α gyöke szerkeszthető, akkor a $\mathbb{Q}(\alpha)$ testnek van egy $\mathbb{Q}$ felett másodfokú részteste, ami $\mathbb{Q}(\sqrt{e})$ alakú, és ezért $\alpha_1=p+q\sqrt{e}+\sqrt{r+s\sqrt{e}}$ alakú, ahol $p,q,r,s,e\in\mathbb{Q}$. Írjuk fel gyöktényezős alakban azt a polinomot, amelynek gyökei α_1, $\alpha_2=p+q\sqrt{e}-\sqrt{r+s\sqrt{e}}$, $\alpha_3=p-q\sqrt{e}+\sqrt{r-s\sqrt{e}}$, és $\alpha_4=p-q\sqrt{e}-\sqrt{r-s\sqrt{e}}$. Az $(u-v)(u+v)=u^2-v^2$ azonosságot ismételten alkalmazva látjuk, hogy ez racionális együtthatós, és mivel van közös gyöke az eredeti polinommal, ami irreducibilis, a két polinom megegyezik. Azaz a többi gyök is kifejezhető négyzetgyökökkel racionális számokból indulva. Végül számolással látható, hogy tetszőleges negyedfokú egyenlet esetén a harmadfokú rezolvens gyökei rendre $(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)/2$, $(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)/2$, $(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)/2$. A négy α_i által generált (2–hatvány fokú) bővítésben tehát benne vannak a harmadfokú rezolvens gyökei, és így nem lehetnek harmadfokúak. Így a rezolvens nem irreducibilis, és mivel harmadfokú, van racionális gyöke.

A három állítás közül az utolsót könnyű ellenőrizni a Racionális Gyökteszt segítségével, tehát ez a tétel eljárást ad a szerkeszthetőség eldöntésére. Ha $b=0$, akkor az állítások fennállnak, $a/2$ a rezolvens racionális gyöke lesz.