Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Ötödik alkalom (2004. október 12–19)

1. *Igazoljuk, hogy az* $x^5 - 15x - 3$, $x^5 - 35x + 5$, $x^5 - 15x^4 + 6$ *polinomok egyike sem oldható meg gyökjelekkel.*

2. *Mutassuk meg, hogy az* $x^3 - 3x + 1$ *polinom minden gyöke gyökkifejezés* $\mathbb{Q}$ *felett, de a polinom felbontási teste nem érhető el gyökökkel. Ha egy véges normális bővítés minden eleme szerkeszthető, akkor következik-e ebből, hogy maga a bővítés az alaptestből elérhető másodfokú bővítések sorozatával? És ha a normalitás feltételét elhagyjuk?*

3. *Legyen* p *prím, és* K *nulla karakterisztikájú test, ami nem tartalmaz* p*-edik primitív egységgyököt. Mutassuk meg, hogy ha* $a \in K$*, akkor* $x^p - a$ *vagy irreducibilis* K *fölött, vagy pontosan egy gyöke van* K*-ban. Mi lesz a Galois-csoportja ebben a második esetben?*

4. *Az alábbi feladatokban adjuk meg a* K *alaptestet, a* $K(\alpha)$ *fokát* K *felett, az* α *minimálpolinomja felbontási testének fokát* K *felett, és döntsük el, hogy a szerkesztés elvégezhető-e.*

a) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
b) *Adott az egységszakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[4]{2}$.
c) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[6]{2}$.
d) *Adott az egységszakasz és egy* $\sqrt[3]{2}$ *hosszú szakasz, szerkesztendő* $\alpha = \sqrt[5]{2}$.
e) *Adott* $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,\pi)$*, a feladat az egységsugarú kör négyszögesítése.*
f) *Adott egy szabályos 9-szög a síkon. Szerkesztendő egy szabályos 18-szög. Mi az* α*?*

5. *Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Az egységszakaszból akarunk* π *hosszú szakaszt szerkeszteni. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy a síkon adott egységszakasz két végpontja a* $(0,\pi)$ *és az* $(1,\pi)$ *pontokba kerüljön. Ekkor* $K = \mathbb{Q}(0,1,\pi)$*, amelynek a szerkesztendő szám eleme. Tehát ez a szerkesztés elvégezhető.*

6. *Szerkeszthető-e a háromszög két oldalából és az egyikhez tartozó szögfelezőből?*

7. *Szerkeszthető-e az egyenlő szárú háromszög a szárából és a beírt kör sugarából?*

8. *Igazoljuk, hogy ha* $x^4 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett, akkor ekvivalensek:*

(1) *Az egyenlet valamelyik gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.*
(2) *Az egyenlet összes gyöke szerkeszthető az egységszakaszból kiindulva.*
(3) *A* $8x^3 - 4ax^2 - 8cx + (4ac - b^2)$ *polinomnak van racionális gyöke.*

9. *Tegyük fel, hogy egy nulla karakterisztikájú* K *test feletti* f *polinomnak nincsenek többszörös gyökei. Mutassuk meg, hogy* f *Galois-csoportja akkor és csak akkor része a gyökök halmazán ható alternáló csoportnak, ha* f *diszkriminánsa egy* K*-beli elem négyzete.*

10. *Legyen* p *prímszám, és* K *egy* p *karakterisztikájú test. Definiáljuk a* K *feletti* n*-edik* Φ_n *körosztási polinomot ugyanazzal a rekurzióval, mint* $\mathbb{Z}$ *fölött.*

a) *Tegyük fel, hogy* $n = p^k m$*, ahol már* $p \nmid m$*. Mutassuk meg, hogy* $\Phi_n = \Phi_m^{\varphi(p^k)}$.
b) *Igazoljuk, hogy ha* $p \nmid m$*, akkor* Φ_m *gyökei* K*-ban pontosan a* K *multiplikatív csoportjának* n *rendű elemei.*
c) *Igazoljuk, hogy ha* $p \nmid m$*, akkor* Φ_m *felbomlik* $o_m(p)$ *fokú, a* K *prímteste fölött irreducibilis polinomok szorzatára.*
d) *Hogyan kaphatjuk meg a* K *felett irreducibilis tényezők fokszámát?*