Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév
Első alkalom — megoldásvázlatok (2004 ősz)

1. Átszorozva, és a $\sqrt[3]{2}$ hatványai szerint rendezve $1 = (1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}) = (a+2b+2c) + (a+b+2c)\sqrt[3]{2} + (a+b+c)\sqrt[3]{4}$. Az 1 ilyen alakú felírása egyértelmű, és ezért $a+2b+2c=1$, $a+b+2c=0$, $a+b+c=0$. Az egyenletrendszert megoldva az eredmény $\sqrt[3]{2}-1$. (Ezt számolás nélkül is leolvashattuk volna az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságból. De a fenti módszer általános, minden esetben működik.)

2. Azt tudjuk, hogy $\theta^3+3\theta+1=0$. Innen $\theta^5+3\theta^3+\theta^2=0$. Ebből ki lehet fejezni θ^5-t, és így $\theta^5+2\theta^3=-3\theta^3-\theta^2+2\theta^3=-\theta^3-\theta^2=-\theta^2+3\theta+1$. Látható, hogy θ valamennyi polinomja redukálható legfeljebb másodfokúvá úgy, hogy a legmagasabb fokú tagot mindig alacsonyabb fokúval helyettesítjük.

A $\theta/(\theta-3)$ kiszámításakor az eredményt $a+b\theta+c\theta^2$ alakban keressük, keresztbe szorzunk, nullára redukálunk, a θ kapott polinomját redukáljuk legfeljebb másodfokúvá, majd az együtthatókat nullává tesszük, és a kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk. Az eredmény: $\theta/(\theta-3)=(1/37)-(9/37)\theta-(3/37)\theta^2$. (Számítógéppel közelítőleg ellenőrizhető az eredmény, mert $\theta\approx -0,322185$.)

3. A π transzcendens, minimálpolinomja a 0. Az $1+i$-hez olyan polinomot kell keresni, melynek ez gyöke. Ehhez legyen $1+i=x$, ekkor $i=x-1$, négyzetre emelve és rendezve $x^2-2x-2=0$. Ennek a polinomnak tehát gyöke az $1+i$, és ez akkor lesz a minimálpolinom, ha irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ez látszik abból, hogy másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban. Ha $x=\sqrt{2}+i$, akkor $(x-i)^2=2$, azaz $x^2-3=2ix$, még egyszer négyzetre emelve és rendezve x^4+2x^2+9. E polinom irreducibilitása ugyanúgy látható be, mint az x^4+9 polinomé az első félévben: $\mathbb{C}$ felett kell először felbontani. (Láthatjuk, hogy ezzel a technikával az összetett gyökös kifejezésekhez néha tudunk olyan polinomot találni, aminek az gyöke, ha a megfelelő átrendezések után mindig hatványozunk.) Ennek alapján $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ minimálpolinomja x^4-10x^2+1 (irreducibilitását az első félévben beláttuk), a $\sqrt[3]{2}$-é x^3-2, az $1+\sqrt[3]{2}$-é $(x-1)^3-2$ (ami x^3-2 eltoltja, ezért irreducibilis), $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$-é pedig x^6-4x^3+2, ami a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis.

Ha $u=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $v=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, és $x=u+v$, akkor vaktában elindulva egy nagyon nagy fokú polinom keletkezne. Köbre emelve $x^3=14+3uv(u+v)$. De $uv=\sqrt[3]{49-50}=-1$ és $u+v=x$, ezért $x^3+3x-14=0$ is igaz. De ez még mindig nem a minimálpolinom, hiszen gyöke a kettő. Mivel ez az egyetlen valós gyök (ami például az $x-2$ kiemelésével adódik), és $u+v$ valós, ezért $u+v=2$, minimálpolinomja $x-2$.

A $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ azonosságból kapjuk, hogy $\cos 20^\circ$ minimálpolinomja $x^3-(3/4)x-(1/8)$ (ez a racionális gyökteszt miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett). Végül az n-edik primitív egységgyökök közös minimálpolinomja az n-edik körosztási polinom, hiszen ez irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett, és normált.

7. Felhasználjuk, hogy $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\subseteq K(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ akkor és csak akkor, ha mindegyik α_i kifejezhető a β_j-kből és K elemeiből a négy alapművelet segítségével.
– A $\sqrt{6}$ kifejezhető $\sqrt{3}$-ból, $\sqrt{2}+1$-ből és racionális számokból, mert $\sqrt{6}=\sqrt{3}((\sqrt{2}+1)-1)$.
– Nyilván $K(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})\subseteq K(\sqrt[6]{2})$, hiszen $\sqrt{2}$ is és $\sqrt[3]{2}$ is hatványa $\sqrt[6]{2}$-nek. Megfordítva, $\sqrt[6]{2}=(\sqrt{2})/(\sqrt[3]{2})$.
– Belátjuk, hogy $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jó. Nyilván ez eleme $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$-nak, kérdés, hogy $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ kifejezhető-e c-vel és racionális számokkal. Mivel $c^2=5+2\sqrt{6}$, ezért $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}(c)$. Továbbá $c^3=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+3\sqrt{6}c$, ezért innen $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(c)$. De ezzel és $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$-mal nyilván kifejezhető a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$.
– A $\sqrt{2}=a+b\sqrt{3}$-ból négyzetre emelve és átrendezve $2ab\sqrt{3}=2-a^2-3b^2$ adódik. Ha ezt ab-vel eloszthatnánk, akkor az jönne ki, hogy $\sqrt{3}$ racionális. Ez ellentmondás, tehát a vagy b nulla. A második esetben $\sqrt{2}=a$, azaz racionális, az nem lehet. De $b=0$ sem lehet, mert abból $\sqrt{6}$ racionalitása adódna. (Egy pozitív egész k-adik gyöke csak akkor racionális, ha minden prím k-val osztható kitevőn szerepel.)
– $\alpha,\beta\in K(\alpha,\beta)$, és mivel ez test, tartalmazza $\alpha\beta$-t is. Ezért $K(\alpha,\alpha\beta)\subseteq K(\alpha,\beta)$. Megfordítva, $\alpha\neq 0$ miatt a β, ami $\alpha\beta$ és α hányadosa, benne van a $K(\alpha,\alpha\beta)$ testben. De α is benne van, így $K(\alpha,\alpha\beta)\supseteq K(\alpha,\beta)$.

Megjegyezzük, hogy ezzel másik bizonyítást kaptunk arra, hogy x^4-10x^2+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ felett. Ugyanis $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Az első bővítés foka 2, mert $\sqrt{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ felett x^2-2, azaz másodfokú. A második bővítés is legfeljebb másodfokú, hiszen $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ felett osztója x^2-3-nak, de nem elsőfokú, mert $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Tehát a szorzástétel miatt a két bővítés egymásutánja negyedfokú. Így $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ foka 4 lesz $\mathbb{Q}$ felett. Ezért ha egy negyedfokú racionális együtthatós polinomnak gyöke, akkor az a minimálpolinom konstansszorosa lehet csak, és így irreducibilis.