Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Tizedik alkalom (2004. december 6–7)

1. *Igazoljuk, hogy disztributív hálóban a komplementum, ha létezik, akkor egyértelmű.*

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden halmaz partícióhálója komplementumos.*

3. *Mutassuk meg, hogy a moduláris hálók varietást alkotnak, ami önduális. Vezessük le a disztributív azonosságból a moduláris szabályt.*

4. *Igazoljuk, hogy komplementumos moduláris háló intervalluma is komplementumos.*

5. *Mutassuk meg, hogy moduláris hálóban nem lehet egy elemnek két különböző, összehasonlítható komplementuma.*

6. *A valós projektív síkon tekintsük a pontok, és az egyenesek halmazát. Mutassuk meg, hogy ezek az üres halmazzal és az egész síkkal kiegészítve moduláris hálót alkotnak. Egyszerű ez a háló? Négy általános helyzetű pont hány elemű részhálót generál?*

7. *Igazoljuk, hogy az intervallum-izomorfizmus tétel csak moduláris hálóban érvényes.*

8*. *Igazoljuk, hogy ha a G csoport direkt négyzetének részcsoporthálója moduláris, akkor G-ben minden részcsoport normálosztó.*

9. *Tegyük fel, hogy I ideálja, F pedig filtere az L disztributív hálónak. Legyen $(a, b) \in \theta_I$ akkor és csak akkor, ha van olyan $x \in I$, melyre $a \vee x = b \vee x$, és ψ_F a duális fogalom.*

a) Bizonyítsuk be, hogy θ_I kongruencia, amelynek I osztálya.

b) Igazoljuk, hogy ha $x \in I$ és $y \in F$ esetén mindig $x \leq y$, akkor $\theta_I \cap \psi_F = 0_L$.

10. *Egy háló egy ideálját prímideálnak nevezzük, ha komplementere filter. Igazoljuk, hogy disztributív hálóban minden ideál része egy prímideálnak.*

11. *Határozzuk meg a szubdirekt irreducibilis disztributív hálókat.*

12. *Igazoljuk, hogy Boole-algebrában $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ és $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.*

13. *Mutassuk meg, hogy minden szubdirekt irreducibilis Boole-algebra kételemű.*

14. *Határozzuk meg a végesen generált szabad Boole-algebrák elemszámát.*

15*. *Mutassuk meg, hogy a három elemmel generált szabad háló végtelen. Rajzoljuk le az x, y, z elemekkel generált, $x \vee y = y$ (azaz $x \leq y$) definiáló relációval megadott hálót.*

16**. *Bizonyítsuk be, hogy minden végesen generált disztributív háló véges. Adjunk alsó és felső becslést az n elemmel generált disztributív háló elemszámára.*

17**. *Bizonyítsuk be, hogy minden háló kongruencia-hálója disztributív.*

18. *Határozzuk meg egy modulus, illetve egy kommutatív gyűrű összes polinomját.*

19. *Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{A}$ algebrában az $a_1, \ldots, a_n$ elemek által generált részalgebra a $t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ alakú elemekből áll, ahol t befutja az adott típusú n-változós termeket.*

20. *Igazoljuk az $\mathbf{SH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HS}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PS}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathcal{K})$, $\mathbf{PH}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HP}(\mathcal{K})$ összefüggéseket.*

21*. *Mi lesz a $\mathbb{Z}^+$ csoport illetve a $\mathbb{Z}$ gyűrű által generált varietás?*

22. *Adjunk struktúratételt az $x^2 = x$ azonossággal definiált gyűrűvarietás véges elemeire.*