Mat-alkmat gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első alkalom (2004. szeptember 14)

Tegyük fel, hogy K részteste L-nek, és $\alpha \in L$. Keressük meg azokat a $K[x]$-beli polinomokat, melyeknek α gyöke. Ha ilyen nincs más, csak a nullapolinom, akkor α *transzcendens* K fölött. Egyébként, azaz ha α *algebrai* K fölött, akkor egyértelműen létezik egy olyan normált $m_\alpha \in K[x]$ polinom, hogy a keresett polinomok éppen az m_α többszörösei. Az m_α neve az α *minimálpolinomja.* A minimálpolinomot úgy lehet megtalálni, hogy olyan normált, K fölött **irreducibilis** polinomot keresünk, melynek α gyöke. **Ismétlés:** az első félévben tanult módszerek az irreducibilitás eldöntésére:

- Egy másod- vagy harmadfokú polinom akkor és csak akkor irreducibilis egy K test fölött, ha K-ban nincs gyöke (speciálisan $\mathbb{Q}$ felett használhatjuk a racionális gyöktesztet).
- A Schönemann-Eisenstein kritérium ($\mathbb{Q}$ feletti irreducibilitás egész együtthatósra).
- Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$, akkor vizsgáljuk modulo p, ahol p prímszám.
- f akkor és csak akkor irreducibilis egy K test felett, ha egy eltoltja ($f(x+c)$, $c \in K$) az.
- Bontsuk fel a polinomot egy bővebb testben, és használjuk a felbontás egyértelműségét.

1. *Írjuk fel az* $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ *szám reciprokát* $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ *alakban, ahol* $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

2. *Legyen* θ *az* x^3+3x+1 *polinom (egyetlen) valós gyöke. Írjuk fel a* $\theta^5+2\theta^3$ *és a* $\theta/(\theta-3)$ *számokat* $a + b\theta + c\theta^2$ *alakban, ahol* $a, b, c \in \mathbb{Q}$. *Mi a* θ *minimálpolinomja* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

3. *Határozzuk meg az alábbi számok minimálpolinomját a racionális test felett:* π, $1+i$, $\sqrt{2}+i$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $1+\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $\cos 20°$, *egy primitív* n*-edik egységgyök, ahol* $n = 2, 3, 4, 5, 6$, *illetve tetszőleges prímszám.*

4. *Legyen* K *részteste* L*-nek, és tekintsük* L*-et algebrának* K *fölött. Mutassuk meg, hogy a minimálpolinom fent definiált fogalma egybeesik a múlt félévben tanultakkal.*

5. *Legyen* A *nullosztómentes algebra a* K *test fölött,* $b \in A$ *és* $f \in K[x]$ *normált polinom, melynek* b *gyöke. Igazoljuk, hogy* $f = m_b$ *akkor és csak akkor, ha* f *irreducibilis* K *fölött.*

6. *Konstruáljunk egy* L *négyelemű testet a műveleti táblák felírásával. Írjuk fel az összes elem minimálpolinomját a kételemű résztest fölött.*

Legyen K részteste az L testnek, és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$. Ekkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ az L legszűkebb olyan részteste, amely K-t és az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elemeket tartalmazza, azaz a K és $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ által **generált** résztest. Ennek a definíciónak az alapján részletesen belátjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in L$, akkor $K(\alpha)(\beta) = K(\alpha, \beta)$. Megmutatjuk, hogy mindkét oldal tartalmazza a másikat. A $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza a β elemet, és a $K(\alpha)$ testet. A $K(\alpha)$ test tartalmazza az α elemet, és a K testet. Ezért $K(\alpha)(\beta)$ tartalmazza K-t is, és az α, β elemeket is. Mivel $K(\alpha, \beta)$ a legszűkebb az ilyen tulajdonságú testek közül, azért $K(\alpha, \beta) \subseteq K(\alpha)(\beta)$. A másik tartalmazás belátásához vizsgáljuk a $K(\alpha, \beta)$ testet. Ez tartalmazza az α elemet, és a K testet, és mivel $K(\alpha)$ a legszűkebb ilyen test, $K(\alpha) \subseteq K(\alpha, \beta)$. De $K(\alpha, \beta)$ tartalmazza a β elemet is, és így a legszűkebb olyan testet is, ami a β elemet és a $K(\alpha)$ testet tartalmazza, ami definíció szerint $K(\alpha)(\beta)$.

7. *Melyek igazak az alábbiak közül:* $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2}+1)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $K(\alpha, \beta) = K(\alpha, \alpha\beta)$, *ahol* $\alpha \neq 0$.