Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév

Második zárthelyi (2003. dec. 12) — megoldásvázlatok

1. Az $1 \in \mathbb{Z}_3$ gyök. Ezt (például a Horner-elrendezéssel) kiemelve a kapott polinomnak szintén gyöke az 1. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy az 1 háromszoros gyök, és $\mathbb{Z}_3$ fölött $x^6 - x^4 + x + 2 = (x-1)^3(x^3 - x + 1)$ (4 pont). Az $x^3 - x + 1$ polinom harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, tehát irreducibilis $\mathbb{Z}_3$ fölött (2 pont).

2. A determinánsnak összesen négy nem nulla kifejtési tagja van, hiszen az első és a második sorban lévő két-két nem nulla számból egyet-egyet kiválasztva az utolsó két sorban már egyértelműen meghatározott, hogy mit kell választanunk (3 pont). A determináns értéke nulla, hiszen van két egyenlő oszlopa. Ezért a fenti tagok előjelezett összege nulla, és így kettő páros, kettő páratlan permutációhoz tartozik (3 pont).

3. Az N mátrixnak három sora kell, hogy legyen, különben MN értelmetlen (1 pont). Ha k oszlopa van, akkor MN egy $2 \times k$-as mátrix. Ha ez egységmátrix, akkor négyzetes, vagyis $k = 2$ (1 pont). Az N mátrix első oszlopát x, y, z-vel, a másodikat u, v, w-vel jelölve az $MN = E$ szorzat a következő (két) lineáris egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} x + y + \,z &= 1 \qquad & u + v + c\,w &= 0 \\ x + y + c\,z &= 0 \qquad & u + v + \,w &= 1 \end{aligned}$$

Az eliminációt elvégezve látszik, hogy ezek $c = 1$ esetén ellentmondásosak, különben pedig van megoldásuk (méghozzá végtelen sok). Tehát a keresett N mátrix pontosan $c \neq 1$ esetén létezik (4 pont).

4. A racionális gyökteszt alapján próbálgatva kapjuk, hogy a $-1/2$ gyöke f-nek (1 pont). A gyöktényezőt kiemelve $f(x) = (2x+1)g(x)$, ahol $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ (1 pont). Azonos átalakítással (vagy $y = x + 1$ helyettesítéssel) adódik, hogy $g(x) = (x-1)^4 + 2$ (2 pont). Ez a polinom a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött (1 pont). Mivel $g(x)$ és $2x + 1$ primitív, ezért $\mathbb{Z}$ fölött is irreducibilisek (1 pont).

5. Mivel $\Phi_3(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ és $111 = 3 \cdot 37$, ezért

$$\Phi_3(x^{111}) = \frac{x^{333} - 1}{x^{111} - 1} = \frac{\Phi_{333}\Phi_{111}\Phi_{37}\Phi_9\Phi_3\Phi_1}{\Phi_{111}\Phi_{37}\Phi_3\Phi_1} = \Phi_{333}\Phi_9\,,$$

tehát nem irreducibilis.

6. A feladatban szereplő determináns éppen az $n \times n$-es $((A_{i,j}))$ mátrixban az első sor utolsó eleméhez tartozó, nem előjelezett aldetermináns, legyen ennek értéke x. Tekintsük a $C = ((A_{j,i}))$ mátrixot, és jelölje $C_{i,j}$ a C mátrix megfelelő előjeles aldeterminánsát. Mivel transzponáláskor a determináns értéke nem változik, a feladatban keresett x a sakktáblaszabály szerint $(-1)^{n+1}C_{n,1}$. Jelölje D a $((C_{j,i}))$ mátrixot. Az inverz mátrix képlete szerint $CD = \det(C)E$, vagyis $D = \det(C)C^{-1}$. Tehát a C^{-1} mátrix elemeit kell kiszámolnunk. Szintén az inverz mátrix képlete szerint $AC = \det(A)E$, ahonnan $C^{-1} = (1/\det(A))A$, és így $D = (\det(C)/\det(A))A$. Az $AC = \det(A)E$ összefüggésben mindkét oldal determinánsát véve $\det(A)\det(C) = \det(A)^n$, és így végül $D = \det(A)^{n-2}A$, vagyis $x = (-1)^{n+1}\det(A)^{n-2}a_{1,n}$. (Megjegyezzük, hogy $\det(C) = \det(A)^{n-1} \neq 0$ miatt C^{-1} értelmes. A feladat állítása egyébként $\det(A) = 0$ esetén is igaz.)