Mat-alkmat szak, első évfolyam, első félév

Első zárthelyi (2003. okt. 31) — megoldásvázlatok

1. Ha $z = x + iy$, akkor $\overline{z}$ és iz távolsága $|(x - iy) - i(x + iy)| = |(x + y) - i(x + y)| = = |x + y|\,|1 - i| = \sqrt{2}|x + y|$. Ennek a maximumát keressük, amikor $x^2 + y^2 = 1$. De $(x+y)^2+(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) = 2$, így $(x+y)^2 \le 2$, és egyenlőség akkor van, amikor $x = y$. Ezért $\sqrt{2}|x + y| \le \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, és egyenlőség az $y = x$ és $x^2 + y^2 = 1$ miatt a $\pm(1 + i)/\sqrt{2}$ pontokban teljesül. *Második megoldás:* Legyen z szöge α. Ekkor iz szöge $\alpha + 90°$, és $\overline{z}$ szöge $-\alpha$ (mindkettő az egységkörön van). A távolságuk tehát legfeljebb 2, és akkor ennyi, amikor egy átmérő végpontjai, vagyis ha $\alpha + 90° - (-\alpha) = 180°$ $(+k360°)$. Innen $2\alpha = 90°$ vagy $2\alpha = 450°$, ahonnan az előző megoldásbeli értékeket kapjuk.

2. Mivel $f(x) = x(x - 1)(x - 2)/6$ egész helyen egész értéket vesz fel, ezért f^2 is. Így $6f^2$ megfelelő (hiszen főtagja $(1/6)x^6$, tehát $6f^2$ hatodfokú, és nem egész együtthatós).

3. A hatvány rendjének képletéből $o(\varepsilon^3) = o(\varepsilon)/(o(\varepsilon), 3)$ (1 pont). Továbbá $o(\overline{\varepsilon}) = o(\varepsilon)$ (a jó kitevőik ugyanazok, hiszen a konjugálás szorzattartó). Tehát $o(\overline{\varepsilon}^2) = o(\varepsilon)/(o(\varepsilon), 2)$ (1 pont). E két tört akkor egyenlő, ha $(o(\varepsilon), 3) = (o(\varepsilon), 2)$. De a baloldal 3-nak, a jobboldal 2-nek osztója. Tehát egyenlőség akkor áll, ha mindkét oldal 1, vagyis ha sem 3, sem 2 nem osztója $o(\varepsilon)$-nak (2 pont). Mivel $o(\varepsilon) \mid 120 = 8{\cdot}3{\cdot}5$, ezért $o(\varepsilon) \mid 5$ (1 pont). Vagyis 5 megoldás van: az ötödik egységgyökök (1 pont). *Második megoldás:* Az ε szöge $k(2\pi)/120$, ahol k egész. Ekkor $\overline{\varepsilon}^2$ szöge $-2k(2\pi)/120 = -k(2\pi)/60$, és ε^3 szöge $3k(2\pi)/120 = k(2\pi)/40$. Az, hogy a két szám rendje egyenlő, azt jelenti, hogy a kapott két tört egyszerűsíthetetlen alakjában a nevező ugyanaz lesz: $k/40 = a/d$ és $-k/60 = b/d$, ahol a és b már d-hez relatív prím. Átrendezéssel $40a = -60b$, azaz $2a = -3b$. Eszerint $3 \mid a$ és $2 \mid b$, vagyis $d \mid 120$ nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, és így csakis 5 vagy 1 lehet. Ekkor viszont $k/40 = a/d$ miatt k osztható 8-cal, $-k/60 = b/d$ miatt pedig 12-vel, vagyis $24 \mid k$. Ez összesen 5 értéket ad k-ra, amelyek könnyen láthatóan megfelelnek.

4. Az $x^2 - x + 1 = 0$ gyökeit trigonometrikus alakban felírva az $\varepsilon_1 = \cos 60° + i \sin 60°$, és az $\varepsilon_2 = \cos(-60)° + i \sin(-60)°$ primitív hatodik egységgyökök adódnak (2 pont). Tudjuk, hogy $x^{200} + x^{80} + x^{10} + 1 = (x^2 - x + 1)q(x) + (ax + b)$. Az ε_i behelyettesítésével, a kitevőket 6-tal maradékosan elosztva $\varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^4 + 1 = a\varepsilon_i + b$ adódik (1 pont). Mivel ε_i^2, ε_i^4 és 1 pont a harmadik egységgyökök, összegük nulla, és így a baloldalon ε_i^2 marad, aminek az értéke a szabályos hatszögből leolvashatóan, vagy algebrai alakban kiszámítva $\varepsilon_i - 1$ (2 pont). Ezért a keresett maradék $x - 1$ (1 pont).

5. Mivel s_k homogén k-adfokú, ezért az elemi szimmetrikusokkal való felírásában is csupa homogén k-adfokú tag szerepel. Ezért σ_n csak akkor szerepelhet, ha $n = k$. A Newton-Girard formulát erre az esetre felírva σ_n együtthatója $n(-1)^{n-1}$ lesz, mert az e formulában szereplő többi $s_j\sigma_{n-j}$ tagból a fenti megjegyzés szerint nem kapunk σ_n-et.

6. Nincs. Belátjuk n szerinti indukcióval, hogy egy n tagú polinomnak csak a nulla lehet legalább n-szeres gyöke. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n - 1$-re igaz. Legyen f egy n-tagú polinom, amelynek a $b \ne 0$ szám n-szeres gyöke. Ha f legalacsonyabb fokú tagja cx^k, akkor a $g = f/x^k$ polinomnak a b szintén n-szeres gyöke lesz. Így g'-nek b legalább $n - 1$-szeres gyöke. De g konstans tagja c, ami a deriválásnál eltűnik, és így g'-nek $n - 1$ tagja van, ami ellentmond az indukciós feltevésnek.