Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizenegyedik alkalom (2003 dec. 1–3)

1. *Az AB, BA, BC, $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. *Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorzunk $E^{(ij)}$-vel? Van-e olyan 3×3-as A mátrix, amellyel a bal- vagy a jobbszorzás tetszőleges 3×3-as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja?*

3. *Adjunk meg olyan 10×10-es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100-as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez* **minden** *10×100-as C-re teljesüljön?*

4. *Számítsuk ki az 5×5-ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$-es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.*

5. *Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix. Mi áll a szorzat diagonálisában?*

6. *Az M és N mátrixok* **felcserélhetők,** *ha $MN = NM$. Határozzuk meg azokat a háromszor hármas mátrixokat, amelyek minden háromszor hármas mátrixszal felcserélhetők.*

7. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

8. *Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok, számítsuk ki $tr(AB - BA)$ értékét.*

9. *Mutassuk meg, hogy ha M kétszer kettes mátrix, akkor $M^2 - tr(M)M + \det(M)E = 0$.*

10. *Megoldható-e $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben az $X^2 = -E$ egyenlet? Adjuk meg az $X^2 = E$ egyenlet összes megoldását. Keressünk olyan mátrixokat, melyek négyzete nulla.*

11. *Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Az utolsó invertálás házi feladat. Írjuk fel a második és harmadik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12*. *Páratlanországban mindenki páratlan sok embernek küldött karácsonyi ajándékot. Bárhogy is választunk ki két különböző embert, azok száma, akiknek ők mindketten küldtek ajándékot, páros. Mutassuk meg, hogy mindenki páratlan számú ajándékot kapott.*

13*. *Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.*