Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizedik alkalom (2003 nov. 24–26)

1. *Adjuk meg Gauss-eliminációval az alábbi egyenletrendszerek* **általános** *megoldását. Az első egyenletrendszer mely megoldásában minimális az ismeretlenek négyzetösszege?*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 14 \\ -3x \phantom{{}-3y} + 2z &= 3 \\ x - 6y + 14z &= 31 \end{aligned}$$

HF:

$$\begin{aligned} x - y + z + t &= 2 \\ -3x \phantom{{}-y+z} + 3t &= 0 \\ -2x - y + z + 4t &= 2 \\ 4x - y + z - 2t &= 2 \end{aligned}$$

2. *Tekintsünk egy n ismeretlenes, m egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.*

Általános	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

Homogén	$t = 0$	$t = 1$	$t = \infty$
$n < m$			
$n = m$			
$n > m$			

3. *Van-e olyan egész együtthatós lineáris egyenletrendszer, ami $\mathbb{Q}$ felett ellentmondásos, $\mathbb{Z}_2$ felett egynél több megoldása van, és $\mathbb{Z}_3$ felett pontosan 1?*

4. *Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális komplex megoldása, akkor hány racionális megoldása van? Ha egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszernek van komplex, nem valós megoldása, akkor hány valós megoldása van?*

5. *Egy valós együtthatós lineáris egyenletrendszernek az összes $\mathbb{R}$-beli megoldása racionális szám. Szükségképpen racionálisak-e az együtthatók? Hány megoldása lehet $\mathbb{C}$ felett?*

6. *Adott n szám úgy, hogy közülük bármely $n-1$ összege 2001. Melyek ezek a számok? HF: adott $a \neq b$ számok esetén oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &= 1 \\ a\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + b\,x_{n-1} + a\,x_n &= 2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b\,x_1 + a\,x_2 + \ldots + a\,x_{n-1} + a\,x_n &= n \end{aligned}$$

7*. *Egy n-szög csúcsaira számokat akarunk úgy írni, hogy bármelyik csúcsból induljunk is el a sokszög mentén, a sorra következő m szám összege 1 legyen. Mely m és n értékek esetén lehetséges ez úgy, hogy valamelyik csúcsra $1/m$-től különböző szám kerüljön?*

8. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat az első sor szerinti kifejtéssel, majd az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel, végül a felső háromszög alakra hozás módszerével is.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

9. *Igazoljuk, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $m \times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m + k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-edrendű, komplex elemű determinánsban a_{ij} az a_{ji} konjugáltja minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.*

11. *Egy 2001×2001-es determináns minden sora számtani sorozat. Mennyi az értéke?*

12. *Egy determinánsban minden oszlopösszeg osztható héttel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható héttel.*

13. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

14. *Hány inverzió van az alábbi permutációkban, illetve a 'hátulról előre' permutációban?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$$

15. *Mutassuk meg, hogy ha f és g permutációk, akkor $sg(gfg^{-1}) = sg(f)$. Vezessük le ebből, hogy minden transzpozíció páratlan permutáció. Mutassuk meg, hogy minden permutáció cserék szorzata, és egy ilyen előállításban a páros permutációknak mindig páros sok, a pártalanoknak mindig páratlan sok tényezője lesz. Igazoljuk, hogy a páros és a páratlan permutációk ugyanannyian vannak (és egy n elemű halmazon ez a szám $n!/2$).*

16. *Írjuk fel az általános kétszer kettes, majd a háromszor hármas determináns képletét a definíció alapján. Mutassuk meg, hogy a háromszor hármas determináns értéke nulla lesz, ha két oszlopa egyenlő, és hogy a háromszor hármas determináns, mint a második oszlopvektorának függvénye, összegtartó. Az előjeles mérték három tulajdonságából vezessük le a determináns definíciójában szereplő képletet 3×3-as, majd általános mátrixokra is.*

17. *Az $((a_{ij}))$ négyszer négyes mátrix determinánsának kiszámításakor mi lesz az alábbi tagok előjele: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{34}a_{41}a_{22}$, $a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}$?*

18. *Hogyan változik a determináns, ha a mellékátlóra tükrözünk?*

19. *Legyen T test, $A \in T^{k \times k}$, $B \in T^{m \times m}$, $X \in T^{k \times m}$ és O az $m \times k$-s nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M = \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A)\det(B)$. Vezessük le ebből az állításból, hogy háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata. Vezessük le a kifejtési tételt is!*

20. *Van-e olyan $123456789 \times 123456789$-es mátrix, melyben csak a 0 és 1 számok szerepelnek, és determinánsa 2?*

21*. *A sakkbajnokság félidejénél azt tapasztalták, hogy nem lehet kiválasztani úgy néhány játékost, hogy bármelyik játékos (a közülük valók is) ezek ellen összesen egész számú pontot szerzett. Igazoljuk, hogy a résztvevők száma páros (mindenki mindenkivel egyszer játszott, győzelem: $1 - 0$, döntetlen: $0.5 - 0.5$, saját maga ellen mindenki nulla pontot szerzett.)*