Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Kilencedik alkalom (2003 nov. 17–19)

1. *Számítsuk ki Φ_{12}-t kétféleképpen, majd a prímhatvány-indexű körosztási polinomokat.*

2. *Mutassuk meg, hogy ha $n > 1$ páratlan, akkor $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.*

3. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egészre $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.*

4. *Határozzuk meg a körosztási polinomok felhasználásával rendre a 12-edik, 18-adik illetve 24-edik primitív egységgyökök összegét és szorzatát. Általánosítsuk a feladatot!*

5*. *Legyenek $m \mid n$ pozitív egészek úgy, hogy n minden prímosztója osztja m-et is. Igazoljuk, hogy $\Phi_n(x) = \Phi_m(x^{n/m})$. Számítsuk ki ennek alapján a $\Phi_n(x)$ polinomokat, ha $n = 36, 72, 144, 100$.*

6*. *Legyen p prímszám, és $n = p^k m$, ahol már $p \nmid m$. Mutassuk meg, hogy modulo p a Φ_n egyenlő a $\Phi_m^{\varphi(p^k)}$ polinommal.*

7*. *Igazoljuk, hogy a Φ_n polinom egy alkalmas eltoltjára akkor és csak akkor teljesül a Schönemann-Eisenstein, ha n prímhatvány, vagy egy páratlan prímhatvány kétszerese.*

8. *Adjunk meg egy olyan polinomot egy alkalmas test felett, melynek van olyan nyolcszoros u gyöke, hogy u a polinom deriváltjának is (pontosan) nyolcszoros gyöke. Igaz-e tetszőleges test felett, hogy ha egy elem egy polinomnak egyszeres gyöke, akkor a deriváltjának biztosan nem gyöke?*

9. *Mutassuk meg tetszőleges test felett, hogy ha az f polinomnak van többszörös tényezője (azaz g^2 alakú osztója, ahol g nem konstans polinom) akkor $(f, f') \neq 1$. Mely p prímekre igaz, hogy $x^n - 1$-nek van többszörös tényezője $\mathbb{Z}_p$ felett?*

10. *Lehet-e egy $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{Z}_2$ felett irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben?*

11*. *Általánosítsuk az interpolációt többváltozós polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény. Mutassuk meg, hogy véges test felett nem érvényes a polinomok azonossági tétele. Adjunk meg minden véges test felett olyan polinomot, amelynek nincs gyöke az adott testben.*

12. *Igazoljuk, hogy az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ alakú számok alkotta gyűrű hányadosteste „valójában" az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok teste.*

13*. *Legyen $f(x, y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x, y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $\mathbb{C}[y]$-beli polinomokból képzett törtekből álló testet.*

a) *Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ feletti polinom?*
b) *Következik-e a Schönemann-Eisenstein tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ felett?*
c) *Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x, y]$-ban?*

14*. *Jelölje $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok gyűrűjét a $\mathbb{C}$-beli összeadásra és szorzásra, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Igazoljuk, hogy ebben végtelen sok invertálható elem van.*