Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Hetedik alkalom (2003 nov. 3–5)

1. *Igaz-e a* $2x \mid 3x^2$ *oszthatóság rendre a* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *feletti polinomok körében?*

2. *Mutassuk meg, hogy* $\mathbb{Z}[x]$*-ben egy polinom akkor és csak akkor osztható egy egész számmal, ha minden együtthatója osztható vele.*

3. *Határozzuk meg* $\mathbb{R}[x]$*-ben,* $\mathbb{Q}[x]$*-ben, illetve* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az egységeket. Teljesül-e* $\mathbb{R}[x]$*-ben,* $\mathbb{Q}[x]$*-ben, illetve* $\mathbb{Z}[x]$*-ben, hogy az irreducibilis polinomok pontosan azok a nem nulla és nem konstans polinomok, amelyek nem bonthatók alacsonyabb fokú polinomok szorzatára?*

4. *Bontsuk fel a* $6(x^2-2)(x^2+1)$ *polinomot* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára.*

5. *Adjuk meg a* $2x^3+3x+5$ *polinom racionális gyökeit, és döntsük el, felbonthatatlan-e ez a polinom* $\mathbb{Q}$ *felett.*

6. *Felbonthatatlan-e* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az* x^4+x+1 *polinom? És* $\mathbb{R}[x]$*-ben?*

7. *Irreducibilis-e* x^4+4 *illetve* x^4+9 *a* $\mathbb{Q}$ *felett? Általánosítsunk!*

8. *Bontsuk fel az* x^4-10x^2+1 *polinomot* $\mathbb{R}$ *felett felbonthatatlanok szorzatára (segítség a számoláshoz: a polinomnak gyöke a* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$*). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a* $\mathbb{Q}$ *feletti felbontást is.*

9. *Az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül a Schönemann-Eisenstein kritérium:* $x^{11}+2x+18$, $x^{11}+2x+12$, $x^{11}+12x+5$, $x^{11}+n$ *(mely* n*-ekre?).*

10. *Bizonyítsuk be, hogy ha* p *prímszám, akkor az* $(x+y)^p-x^p-y^p$ *polinom osztható* p*-vel* $\mathbb{Z}[x,y]$*-ban.*

11. *Alkalmazható-e a Schönemann-Eisenstein a* $\Phi_p(x+1)$ *polinomra, ahol* p *prímszám?*

12. *Irreducibilis-e* $\mathbb{Q}$ *felett* x^3+9, x^4+1, x^4-2x+1, x^4+4x+1, $x^{10}-x^5+1$*?*

13. *A* $6x^4-9x+1$ *polinomot a 3 prímszám segítségével vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett. A kapott gondolatmenetet próbáljuk meg általánosítani.*

14. *Irreducibilisek-e az alábbi polinomok?*

a) $\mathbb{C}$ *illetve* $\mathbb{R}$ *felett* x^7+x+1, x^2-2, x^2+x+1.

b) $\mathbb{Q}$ *felett* $3x^7-6x^6+6x^2+3x-2$, $3x^7+x^6+6x^2+2x-2$, $3x^7-6x^6+6x^2+2x-2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, x^4-14x^2+9, x^4-x^2+1, $3x^7+6x-18$, x^5+4.

15*. *Igazoljuk, hogy az* $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$ *polinom irreducibilis* $\mathbb{Z}$ *felett, ha* $a_1,\dots,a_n$ *páronként különböző egész számok.*

16*. *Van-e olyan* $f(x)$ *egész együtthatós polinom, hogy minden* $g(x)$ *egész együtthatós polinomra az* $f\big(g(x)\big)$ *polinom irreducibilis legyen* $\mathbb{Q}$ *fölött?*

17. *Bizonyítsuk be, hogy a kitüntetett közös osztó asszociáltság erejéig egyértelmű. Definiáljuk a kitüntetett közös többszörös fogalmát, mutassuk meg, hogy ez is egyértelmű, és adjunk rá képletet a kanonikus alak segítségével.*

18. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $a,b\in\mathbb{Q}$*, és* $a\neq 0$*, akkor tetszőleges* $f\in\mathbb{Q}[x]$ *akkor és csak akkor irreducibilis* $\mathbb{Q}$ *felett, ha* $f(ax+b)$ *az. Igaz-e a megfelelő állítás* $\mathbb{R}$ *felett?*