Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév
Ötödik alkalom (2003 okt. 13–15.)

1. *Határozzuk meg az* $x^6 + x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4$ *polinom többszörös gyökeit.*

2. *Mely* $b \in \mathbb{C}$ *értékekre van az* $x^n + bx^k + 1$ *polinomnak háromszoros gyöke?*

3.** *Az* n*-edfokú* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinomnak nincs többszörös gyöke. Lehet-e legalább* n*-szeres gyöke az* $[f']^2 - ff''$ *polinomnak?*

4. *Igazoljuk, hogy egy polinom gyökeinek a multiplicitása egyértelműen meghatározott (vagyis az* $f(x) = (x-b)^k g(x)$, $g(b) \neq 0$ *definíció adott* f *és* b *mellett csak egyetlen* k*-ra teljesülhet). Mutassuk meg, hogy a polinomok kanonikus alakjában szereplő kitevők éppen a megfelelő gyökök multiplicitásai a most idézett definíció értelmében is.*

---

5. *Osszuk el maradékosan az* $x^3 - 2$ *polinomot* $2x^2 + 2x - 3$*-mal.*

6. *Mi lesz a maradék, ha az* $x^4 + x^2 + 1$ *polinomot elosztjuk* $x^2 + x + 1$*-gyel? A kapott eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is.*

7. *Mi a maradék, ha* $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$*-et osztjuk* $x^2 + 1$*-gyel illetve* $x^2 - 1$*-gyel?*

8. *Állapítsuk meg az* $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ *és a* $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ *polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal, és az eredményt írjuk fel (a szokásos visszahelyettesítési eljárással)* $fp + gq$ *alakban, ahol* p *és* q *alkalmas polinomok.*

9. *Elvégezhető-e* $\mathbb{Z}[x]$*-ben az* $x : 2$ *maradékos osztás?*

10. *Vezessük le a gyöktényező kiemelhetőségéről szóló állítást a maradékos osztás tételéből.*

---

11. *Adjunk meg olyan polinomot, amelyre* $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ *és* $f(-1) = 0$.

12. *Tegyük fel, hogy az* $f \in \mathbb{C}[x]$ *polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy* f *racionális együtthatós? Igaz-e az állítás, ha „racionális” helyett mindenütt „egész” szerepel?*

13. *Létezik-e olyan* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *polinom, melyre* $f(10) = 400$, $f(14) = 440$ *és* $f(18) = 520$*?*

14*. *Tegyük fel, hogy* n *egész alapponthoz keresünk interpolációs polinomot, és az itt felvett értékek maguk is egészek, de a kapott legfeljebb* $n-1$*-edfokú interpolációs polinom mégsem egész együtthatós. Lehetséges-e, hogy az interpoláció egy magasabb fokú, de egész együtthatós polinommal is elvégezhető?*

---

15. *Mutassuk meg, hogy ha* $f \in \mathbb{R}[x]$ *és* $z \in \mathbb{C}$*, akkor* z *és* $\overline{z}$ *ugyanannyiszoros gyöke* f*-nek. Igazoljuk, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.*

16. *Adjuk meg az összes olyan* $\mathbb{Q}[x]$*-beli tizedfokú polinomot, melynek az* i *ötszörös gyöke.*

17.** *Legyen* f *valós együtthatós polinom, mely minden valós helyen pozitív értéket vesz fel. Mutassuk meg, hogy* f *előáll két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.*

---

18. *Jelölje egy tetszőleges* f *polinom* k*-adfokú homogén komponensét* f_k*. Mutassuk meg, hogy az* fg *polinom* k*-adfokú homogén komponense* $f_0g_k + f_1g_{k-1} + \cdots + f_kg_0$*. Bizonyítsuk be, hogy többhatározatlanú polinomok szorzásakor a fokok összeadódnak.*

19. *Igaz-e, hogy szimmetrikus polinom minden homogén komponense is szimmetrikus?*