Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Negyedik alkalom (2003 okt. 6–8.)

Az $rx_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$ *foka* $m_1+\dots+m_n$. Egy polinom foka a legnagyobb fokú tagjának a foka. Ha minden tag foka ugyanaz, akkor a polinom *homogén.*

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex együtthatós polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát.*
 a) $(x^3+3x^2+2)-(x^3+3x-4)$.
 b) $(x^2+ix+3)(x^2+i)$.

2. *A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az* $f(x)=x^6-4x^4+x^3-x^2+4$ *polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel* $f(x)$*-et* $(x-2)g(x)+f(2)$ *alakban.*

3. *Hányszoros gyöke az* x^4-x^3-x+1 *polinomnak az* 1*? A Horner-elrendezést használjuk.*

4*. *Igazoljuk, hogy ha az* f *polinomba a Horner-elrendezéssel helyettesítjük be a* b *számot, akkor* $f(x)=(x-b)g(x)+f(b)$*, ahol* g *együtthatói a táblázat alsó sorában szereplő számok.*

5. *Írjuk fel az* x^4+4 *polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Hogyan lehetne ezt a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára bontani?*

6. *Mutassuk meg, hogy ha két* n*-edfokú komplex együtthatós polinom* n *(komplex) helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők.*

7. *Legyenek* $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ *az összes* n*-edik egységgyökök.*
 a) Bizonyítsuk be, hogy $x^n-1=(x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_n)$.
 b) A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n*-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.*
 c) Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n*-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.*

8. *Határozzuk meg a* $2x^4+2x+3$ *polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.*

9. *Az alábbi* p *polinomot bontsuk homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a* p^7 *polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot. Helyettesítsük be mindegyik* x_i *helyére a négy határozatlanú* σ_i *elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.*

$$p(x_1,x_2,x_3,x_4)=ix_1x_2x_3x_4^2-x_1^2x_3^3+3x_1^3x_2+\pi x_1^2x_2^3+x_4-x_1^2x_2^2x_3+2x_1^2x_2x_3x_4-6x_1^2x_2^2x_4\,.$$

10. *Egy 3-határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja* $x_1^2x_2^2x_3$*. Lehet-e neki tagja* $x_1x_2^3x_3$*? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk fel, mi az eljárás első lépése?*

11. *Határozzuk meg az* x^n+x+1 *polinom (komplex) gyökeinek köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét* $(n\geq 2)$.

12. *Legyenek* a,b,c *az* x^3+3x+1 *polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei* a^2,b^2,c^2*, illetve* $a+b$*,* $a+c$*,* $b+c$.

13. *Írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként a* $\sum_{1\leq i\neq j\leq n}x_i^2x_j$ *összeget.*