Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Második és harmadik alkalom (2003 szept. 22 – okt. 1.)

1. *Adjuk meg az* $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^6 = 1 + i$, $x^n = -1$ *egyenletek összes megoldását.*

2. *Mivel egyenlő* $\binom{2003}{0} + \binom{2003}{4} + \binom{2003}{8} + \binom{2003}{12} + \dots$ *?*

3. *Fejezzük ki* $\cos x$ *és* $\sin x$ *segítségével* $\sin 7x$*-et.*

4*. *Hozzuk zárt alakra a* $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ *összeget.*

---

5. *Tekintsük az* 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ *számokat. Mennyi ezek rendje? Melyek egységgyökök? Mely* n*-ekre lesznek ezek a számok* n*-edik egységgyökök? És primitív* n*-edik egységgyökök?*

6. *Ha* ε *rendje osztható néggyel, mi lesz* $-\varepsilon$ *rendje?*

7. *Ha* ε *primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet* $o(-i\varepsilon)$*?*

8. *Mutassuk meg, hogy ha* $n > 0$ *egész,* $\varepsilon \in \mathbb{C}$, *és* $\varepsilon^n = i$, *akkor* $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

9. *Mutassuk meg, hogy ha* n *páratlan pozitív egész, akkor a* $2n$*-edik primitív egységgyökök épp az* n*-edik primitív egységgyökök ellentettjei. (Először kis* n *számokra ellenőrizzük).*

10. *Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?*

11. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek.*
  a) *Hány közös gyöke van az* $x^n = 1$ *és* $x^m = 1$ *egyenleteknek?*
  b) *Igazoljuk, hogy egy* n*-edik és egy* m*-edik egységgyök szorzata* nm*-edik egységgyök.*
  c) *Mutassuk meg, hogy egy* n*-edik és egy* m*-edik primitív egységgyök szorzata akkor és csak akkor* nm*-edik primitív egységgyök, ha* m *és* n *relatív prímek.*

12. *Számítsuk ki az* n*-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.*

13. *Határozzuk meg a primitív tizenkettedik egységgyökök összegét és szorzatát.*

14. *Mutassuk meg, hogy a* z_1, z_2, z_3, z_4 *páronként különböző komplex számok akkor és csak akkor vannak egy körön vagy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz a* $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \bigg/ \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ *kifejezés valós szám.*

15. *Igazoljuk komplex számok felhasználásával Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza rendre* a, b, c, d, *átlóinak hossza pedig* e *és* f, *akkor* $ac + bd \geq ef$, *és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a négyszög húrnégyszög.*

---

16. *Egy* 8×8*-as sakktáblából kitörjük az egyik átló két végpontján lévő két sarokkockát. Lefedhető-e a kapott alakzat* 2×1*-es dominókkal (egyrétűen és hézagmentesen)?*

17. *Igazoljuk, hogy egy* 100×100*-as sakktábla nem fedhető le* 8×1*-es dominókkal. Általánosítsuk a feladatot más méretű sakktáblára és dominókra.*

18. *Egy tábla csokoládét, amely három vízszintes és nyolc függőleges osztással* 9×4 *kis téglalapra van osztva, szét akarunk tördelni a kis téglalapokra (minden törésnél egy osztás mentén egy darabot törünk ketté). Hány törésre van legalább szükség? Mi a jó stratégia?*