Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Tizenharmadik alkalom (2003 dec. 15–17)

1. *Jelölje F_α a síkon az origó körüli, pozitív irányú, α szögű forgatást, és $T_{a,b}$ az $ax+by=0$ egyenesre való tükrözést. Írjuk fel ezek mátrixát, és számítsuk ki az (x,y) pont képét. Milyen geometriai transzformáció lesz $F_\alpha \circ F_\beta$, $F_\alpha \circ T_{a,b}$, $T_{a,b} \circ F_\alpha$, $T_{a,b} \circ T_{c,d}$?*

2. *Legyen A a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, B pedig az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi lesz ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $A \circ B = B \circ A$?*

3. *Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *A rezultáns módszerével vezessük vissza az alábbi három egyenletrendszert egyismeretlenes egyenletre, és oldjuk is meg őket $\mathbb{R}$ felett.*

$$\begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 2 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \quad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot y^2 + (x+1)\cdot y - 1 = 0 \\ (x-1)\cdot y^2 + \quad x\cdot y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+1 = 2y \\ y^2+1 = 2z \\ z^2+1 = 2x \end{cases}$$

5. *Legyen $M, N \in T^{n\times n}$ (ahol T test). Igazoljuk az alábbiakat.*

a) Ha $MN = M$ és $NM = N$, akkor mindkét mátrix **idempotens** *(azaz $N^2 = N$, illetve $M^2 = M$).*

b) Ha M idempotens, akkor $N = I - M$ is az, és $MN = NM = 0$.

c) Az M akkor és csak akkor **involúció***, azaz $M^2 = I$, ha $(I+M)(I-M) = 0$.*

d) Ha M **nilpotens** *(azaz négyzetes, és van olyan m természetes szám, amire $M^m = 0$), akkor $(I-M)$-nek létezik inverze.*

6.** *Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0)\cdot f(\varepsilon_1)\cdot \ldots \cdot f(\varepsilon_{n-1}).$$

7*. *Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{p-2}x^{p-2} \equiv 0 \ (p)$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \dots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \ (p).$$