Mat-alkmat gyakorlat, első évfolyam első félév

Első alkalom (2003 szept. 15–17)

1. *Végezzük el az alábbi műveleteket:* $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{2003}$, $|(1+2003i)^{100}/(1-2003i)^{100}|$.

2. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között.*
a) $x^2+1=0$.
b) $x^2=-12$.
c) $x^2+2x+2=0$.
d) $x^2+2ix-1=0$.

3. *Határozzuk meg azokat a* $c+di$ *számokat, melyek négyzete* $20i-21$. *Oldjuk meg az* $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ *egyenletet.*

4. *Rajzoljuk le a komplex számsíkon a következő halmazokat:* $\{z : \mathrm{Re}(z+2i) \le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z+1) \ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$, $\{z : |z-i-1| \le 3\}$, $\{z : |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, $\{z : z+\overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z+5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z)+8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z-1)/(z+1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z-1)/(z+1)) = 0\}$.

5. *Hol a hiba a következő levezetésben:* $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$.

6. *Írjuk fel az alábbi számokat trigonometrikus alakban:* $1+i$, $1-i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$.

7. *Oldjuk meg az* $x^3=1$ *és az* $x^4=-4$ *egyenleteket a komplex számok között.*

8. *A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései:* $z \to 3z+2$, $z \to (1+i)z$, $z \to 1/\overline{z}$.

9. *Legyenek* z *és* w *különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint annak a két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, illetve a középpontját, melyeknek az adott két szám két csúcsa.*

10. *Írjunk egy háromszög mindegyik oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Igazoljuk, hogy ezek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak.*

11. *Melyik természetes számmal egyenlő* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$?

12. *Hozzuk ki az* $x^3-21x+20=0$ *egyenlet összes (valós) megoldását a Cardano-képletből.*

13. *Számítsuk ki az* $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\ne 0)$ *egyenlet esetében azokat a* w *értékeket, melyekre az* $x \to x+w$ *helyettesítés eltünteti az* x *illetve az* x^2 *együtthatóját.*

---

14. *Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között:* $x^2=i$, $x^2+3x+4=0$, $x^2-(2+i)x+7i-1=0$, $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$, $x=(3+2i)\overline{x}$, $x=2\cdot\mathrm{Re}(x)$.

15. *Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges, és egyenlő hosszú.*

16****.** *Tekintsük az* $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ *(ahol* $ad-bc\ne 0$, $a,b,c,d\in\mathbb{C}$*) leképezést a komplex síkon. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor képzi az egységkör belsejét önmagára, ha* $f(z)=k(z-\alpha)/(1-\overline{\alpha}z)$ *alakban írható, ahol* $|k|=1$, $|\alpha|<1$, $k,\alpha\in\mathbb{C}$.