Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Második zárthelyi (2002. dec. 19) — megoldásvázlatok

1. A főátlóban $1, 1, -x, -x^3 + x$ lesz, a mátrix tehát diagonalizálható, a diagonális alak főátlója $0, 0, 1, -1$.

2. Nincs. Minden elemrend osztója A minimálpolinomjának, és mivel $x^2 + 1$ és $x^2 + 2$ relatív prímek, a minimálpolinom legalább negyedfokú lenne.

3. Csak ha a és b egészek. Tanultuk ugyanis, hogy egy szám akkor és csak akkor algebrai egész, ha a $\mathbb{Q}$ feletti (normált) minimálpolinomja egész együtthatós. Ha $b = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert ez a minimálpolinom $x - a$ lesz (vagy akár $\mathbb{Q}$ egész-zártsága miatt). Ha $b \neq 0$, akkor α harmadfokú (hiszen a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$-nek csak $\mathbb{Q}$ a valódi részteste), és így minimálpolinomja $(x - a)^3 - 2b^3$ (eddig 4 pont). Ennek együtthatója $3a^2$, és ezért a egész (mert a nevezőjében egyetlen prím sem lehet). Továbbá a konstans tag $-a^3 - 2b^3$ is egész, ahonnan ugyanígy érvelve b is egész (2 pont).

4. Csak az a két négyzetgyöke van, ami a komplex számok között. Tegyük fel ugyanis, hogy $x^2 = i$. Innen mindkét oldal normáját véve $N(x)^2 = 1$, vagyis $x\overline{x} = \overline{x}x = 1$. Az eredeti egyenletet balról $\overline{x}$-tal megszorozva $x = \overline{x}i$, jobbról szorozva $x = i\overline{x}$ adódik. Tehát $\overline{x}$ felcserélhető i-vel. De az i-vel felcserélhető elemek könnyen láthatóan $a + bi$ alakúak, és így x tényleg a komplex számok között van.

5. Nem izomorf, mert az annullátoruk nem ugyanaz. Az $\langle e_1 \rangle$ modulus elemei λe_1 alakúak, ennek annullátora azokból a mátrixokból áll, melyeknek bal felső sarkában nulla áll. Az $\langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$ modulus az $e_1, \ldots, e_{n-1}$ által generált altér lesz, a szerinte vett faktor annullátorában akkor van benne egy K mátrix, ha Ke_n benne van ebben az altérben, vagyis ha a K jobb alsó sarkában álló elem nulla.

6. Az I-t generáló két polinom közös gyökei csak $x = 1$ és így $y = 0$, tehát a Nullstellensatz miatt az ideál radikálja az $(x - 1, y)$ maximális ideál (ez közvetlen számolással is könnyen igazolható, 3 pont). Ezért az ideál maga is primér: ha $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ a primér felbontása, akkor $\sqrt{Q_i}$ csak $\sqrt{I}$ lehet, és tudjuk, hogy ha primér ideálok radikáljai megegyeznek, akkor a metszetük is primér (ez a rész is igazolható közvetlen számolással, azt kihasználva, hogy $\sqrt{I}$ maximális ideál, 3 pont).