Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév

Első zárthelyi (2002. okt. 31) — megoldásvázlatok

1. Nem, mert nullosztó: $x^3+2=(x-1)(x^2+x+1)$, és ezt $x+1$ maradékosztályával megszorozva nullát kapunk, mert $(x+1)(x-1)=-(2x^2+1)$.

2. Az 1° akkor és csak akkor szerkeszthető, ha ε szerkeszthető, ahol ε egy primitív 360-adik egységgyök. Az adott 20°-os szög viszont azt jelenti, hogy az alapadatok generálta test a $\mathbb{Q}(\eta)$, ahol η primitív 18-adik egységgyök. Persze $\mathbb{Q}(\eta)\leq\mathbb{Q}(\varepsilon)$, és ez normális bővítés. Mivel $\varphi(360)/\varphi(18)=16=2^4$, a szerkesztés elvégezhető. (Ez egyébként algebra nélkül is könnyen belátható, egy szabályos ötszögből érdemes kiindulni.)

3. A keresett fok 10. Legyen $K=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Mivel $K(\sqrt{3}+i\sqrt[5]{5})=K(i\sqrt[5]{5})$, elég ez utóbbi fokát kiszámolni (1 pont). Megmutatjuk, hogy $K(i\sqrt[5]{5})=\mathbb{Q}(\sqrt{3},i,\sqrt[5]{5})$. Mivel $(i\sqrt[5]{5})^5=5i$, ezért $K(i\sqrt[5]{5})$-nek eleme az i, és ezért az $\sqrt[5]{5}$ is, tehát a két bővítés ugyanaz (3 pont). A $\mathbb{Q}\leq\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$ negyedfokú (1 pont), az $\sqrt[5]{5}$ foka $\mathbb{Q}$ felett 5, ami relatív prím a 4-hez, és így $\mathbb{Q}(\sqrt{3},i,\sqrt[5]{5})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött 20 (1 pont).

4. Mivel $K=\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ tartalmazza a harmadik egységgyököket, az $x^3-i\sqrt{3}$ felbontási testét úgy kapjuk, hogy egyetlen gyökével bővítünk, és tanultuk azt is, hogy ez harmadfokú normális bővítés (tehát Galois-csoportja $\mathbb{Z}_3$), kivéve, ha a polinom gyökei benne vannak K-ban. Legyen α egy gyök, akkor $(\alpha^3)^2=(i\sqrt{3})^2=-3$, vagyis α^2 gyöke az x^3+3 polinomnak, ami irreducibilis és harmadfokú $\mathbb{Q}$ felett. De a másodfokú $\mathbb{Q}\leq K$ bővítésnek nem lehet harmadfokú eleme, tehát $\alpha\notin K$.

5. Igen. Legyen H egy hármasciklus által generált háromelemű, azaz négy indexű részcsoport, és K a hozzá tartozó közbülső test. Ekkor $|K:\mathbb{Q}|=4$, és ez nem normális bővítés, mert H nem normálosztó. Legyen $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ (ilyen α létezik, mert nulla karakterisztikában minden véges bővítés egyszerű). Jelölje α minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ felett f. Belátjuk, hogy L az f felbontási teste $\mathbb{Q}$ fölött. Mivel $\mathbb{Q}\leq L$ normális bővítés, az f minden gyöke L-ben van. Az f felbontási teste nem lehet K (hiszen az nem normális), de K-t tartalmazza (hiszen már α egyedül is generálja K-t). Ezért e felbontási test foka 4-tel osztható, viszont 12-nek osztója, tehát csak 12 lehet (mert $12/4$ prím), és így az egész L.

6. 18-ra. A karakterisztika 3, ezért $x^{30}-1=(x^{10}-1)^3$. A 81 elemű testben (ami a kilenceleműnek másodfokú bővítése) $10\mid 81-1$ miatt 10 olyan elem van, aminek 10-edik hatványa 1, tehát itt az $x^{10}-1$ polinom biztosan gyöktényezőkre bomlik. Mivel $5\nmid 9-1$, az ötöd- és tizedrendű gyökök nincsenek benne az alaptestben, ezért másodfokúak. Az első és másodrendű gyökök (vagyis ±1) viszont az alaptestben vannak. Ezért $x^{10}-1$-nek két elsőfokú, és 4 másodfokú irreducibilis tényezője lesz.