Matematikus gyakorlat, második évfolyam, első félév
Kilencedik alkalom (2002. december 3–∞)

1. *Racionális szám-e* $\sqrt[127]{2}+\sqrt[298]{3+\sqrt{5}}$*?*

2. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\alpha\in\mathbb{C}$ *szám akkor és csak akkor algebrai egész, ha* $\mathbb{Q}$ *feletti (normált) minimálpolinomja egész együtthatós.*

3. *Határozzuk meg az* $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ *illetve a* $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ *gyűrűk algebrai egész elemeit.*

4. *Van-e olyan 1 abszolút értékű komplex szám, ami nem egységgyök, de algebrai egész?*

5. *Mely fokokban mérve racionális* α *szögekre lesz* $\cos\alpha$ *racionális szám?*

6*. *Legyen az* $f(x)$ *polinom minden együtthatója algebrai egész.*
a) *Igaz-e, hogy ha* f *normált, akkor minden gyöke algebrai egész?*
b) *Igazoljuk, hogy ha* f *tetszőleges számú gyökének szorzatát megszorozzuk* f *főegyütthatójával, akkor algebrai egészet kapunk.*

7*. *Legyen* M *egy* $n\times n$*-es komplex elemű mátrix, aminek valamelyik hatványa az egységmátrix. Mutassuk meg, hogy ha* M *nyoma egy algebrai egész* n*-szerese, akkor ez a nyom vagy nulla, vagy* M *skalármátrix.*

8*. *Igaz-e, hogy* $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ *minden maximális ideálja véges indexű, és alkalmas* p *prímre és* $m>0$ *egészre tartalmazza a* $(p,x_1^{p^m}-x_1,\ldots,x_n^{p^m}-x_n)$ *ideált?*

---

9. *Legyen* R *egységelemes gyűrű, és* I *minimális ideálja* R*-nek. Bizonyítsuk be, hogy* I *egyszerű gyűrű, vagy zérógyűrű.*

10. *Legyenek* $M_1,\ldots,M_k$ *maximális ideálok egy egységelemes, nem feltétlenül kommutatív* R *gyűrűben. Bizonyítsuk be, hogy* $R/(M_1\cap\cdots\cap M_k)$ *izomorf az* R/M_i *gyűrűk közül néhánynak a direkt szorzatával. Keressük meg az állítás csoportelméleti analogonját.*

11. *Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben* $1-ab$ *invertálható, akkor* $1-ba$ *is.*

Jacobson-radikálról csak egységelemes gyűrűk esetében beszélünk, az alábbi gyűrűk egységelemesek!

12. *Határozzuk meg az alábbi gyűrűk radikálját: egy főideálgyűrű egy faktorgyűrűje; a páratlan nevezőjű törtek; a 2-hatvány nevezőjű törtek; a komplex felső háromszögmátrixok.*

13. *Legyen* J *maximális balideálja az* R *gyűrűnek, és* I *az* R/J *faktormodulus annullátora.*
a) *Igazoljuk, hogy* I *a legnagyobb olyan ideálja* R*-nek, mely része* J*-nek.*
b) *Legyen* $0\neq u\in R/J$*. Mutassuk meg, hogy* u *annullátora maximális balideál.*
c) *Mutassuk meg, hogy* I *előáll az* R *alkalmas, maximális balideáljainak metszeteként.*
d) *Vezessük le ebből, hogy* R *radikálja a maximális balideálok metszete.*

14. *Mutassuk meg, hogy a radikálban csak a nulla lehet idempotens elem.*

15. *Igazoljuk, hogy ha* x *eleme a radikálnak, akkor* $1-x$*-nek van jobbinverze is. Mutassuk meg, hogy a radikál nem függ attól, hogy bal- vagy jobboldali modulusokkal definiáljuk, és hogy féligegyszerű gyűrű esetén a bal- és jobboldali Artin-tulajdonság is ekvivalens.*

16. *Igazoljuk, hogy minden véges gyűrű kommutatív, melyben igaz az* $x^n=x$ *azonosság.*